Yellow: text added for independence of questions. In the original exam, some questions were follow-ups of earlier ones. To allow the model to answer all questions independently, necessary information from earlier questions (e.g., the definition of a function) was repeated as an introduction to such follow-up questions.

~~Strikethrough: text removed because it referred to figures.~~

Magenta: text added (to compensate for the absence of figures).

Cyan: mathematical symbols converted to make them machine-readable.

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | De functie f wordt gegeven door f(x) = x^5 - 3xsqrt(x). ~~In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven.~~ Op de grafiek ligt het punt A(1, -2). Bewijs dat de grafiek van f in A stijgt. |
| 2 | De functie f wordt gegeven door f(x) = x^5 - 3xsqrt(x). Op de grafiek ligt het punt A(1, -2). Het lijnstuk PQ is horizontaal en heeft lengte 1/2. De eindpunten P en Q van dit lijnstuk liggen op de grafiek van f. ~~Zie figuur 2.~~ Bereken de x-coördinaat van P. Geef je eindantwoord in drie decimalen. |
| 3 | Een wachttijd is de tijd die je op een dienst moet wachten. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de tijd die nodig is om een medewerker van een klantenservice aan de telefoon te krijgen of de tijd die nodig is voordat je wordt geholpen bij de bakker. In 1909 ontwikkelde de Deense wiskundige Agner Erlang een wiskundig model om te berekenen in hoeveel procent van de gevallen bepaalde wachttijden voorkomen. Dit percentage komt overeen met de oppervlakte onder een grafiek. In deze opgave gaan we uit van een dienst waarbij het volgende model van Erlang hoort: f(t) = 50exp(-(1/2)t) met t>=0. Hierbij is t de tijd in minuten. Stel dat je wilt weten in hoeveel procent van de gevallen de wachttijd tussen 3 en 4 minuten ligt. Je bepaalt dan de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de t as en de lijnen met vergelijking t = 3 en t = 4. Deze oppervlakte blijkt (afgerond) 8,8 te zijn. Dit wil zeggen dat in 8,8% van alle gevallen de wachttijd tussen 3 en 4 minuten ligt. ~~Zie de figuur.~~ Bereken algebraïsch in hoeveel procent van de gevallen de wachttijd tussen 0 en 3 minuten ligt. Geef je eindantwoord in één decimaal. |
| 4 | Een wachttijd is de tijd die je op een dienst moet wachten. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de tijd die nodig is om een medewerker van een klantenservice aan de telefoon te krijgen of de tijd die nodig is voordat je wordt geholpen bij de bakker. In 1909 ontwikkelde de Deense wiskundige Agner Erlang een wiskundig model om te berekenen in hoeveel procent van de gevallen bepaalde wachttijden voorkomen. Dit percentage komt overeen met de oppervlakte onder een grafiek. In deze opgave gaan we uit van een dienst waarbij het volgende model van Erlang hoort: f(t) = 50exp(-(1/2)t) met t>=0. Hierbij is t de tijd in minuten. Stel dat je wilt weten in hoeveel procent van de gevallen de wachttijd tussen 3 en 4 minuten ligt. Je bepaalt dan de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de t as en de lijnen met vergelijking t = 3 en t = 4. Deze oppervlakte blijkt (afgerond) 8,8 te zijn. Dit wil zeggen dat in 8,8% van alle gevallen de wachttijd tussen 3 en 4 minuten ligt. Een wachttijd van meer dan twintig minuten komt in dit voorbeeld zelden voor. Daarom wordt de gemiddelde wachttijd berekend met: (1/100)int(0,20)t.f(t)dt. Om de gemiddelde wachttijd te kunnen berekenen, maakt iemand gebruik van het gegeven dat y = ((1/a)t - (1/a^2))exp(at) een primitieve is van y = texp(at), met a~=0. Bewijs dat y = ((1/a)t - (1/a^2))exp(at) inderdaad een juiste primitieve is van y = texp(at) voor elke waarde van a. |
| 5 | Een wachttijd is de tijd die je op een dienst moet wachten. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de tijd die nodig is om een medewerker van een klantenservice aan de telefoon te krijgen of de tijd die nodig is voordat je wordt geholpen bij de bakker. In 1909 ontwikkelde de Deense wiskundige Agner Erlang een wiskundig model om te berekenen in hoeveel procent van de gevallen bepaalde wachttijden voorkomen. Dit percentage komt overeen met de oppervlakte onder een grafiek. In deze opgave gaan we uit van een dienst waarbij het volgende model van Erlang hoort: f(t) = 50exp(-(1/2)t) met t>=0. Hierbij is t de tijd in minuten. Stel dat je wilt weten in hoeveel procent van de gevallen de wachttijd tussen 3 en 4 minuten ligt. Je bepaalt dan de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de t as en de lijnen met vergelijking t = 3 en t = 4. Deze oppervlakte blijkt (afgerond) 8,8 te zijn. Dit wil zeggen dat in 8,8% van alle gevallen de wachttijd tussen 3 en 4 minuten ligt. Een wachttijd van meer dan twintig minuten komt in dit voorbeeld zelden voor. Daarom wordt de gemiddelde wachttijd berekend met: (1/100)int(0,20)t.f(t)dt. Om de gemiddelde wachttijd te kunnen berekenen, maakt iemand gebruik van het gegeven dat y = ((1/a)t - (1/a^2))exp(at) een primitieve is van y = texp(at), met a~=0. Bereken algebraïsch de gemiddelde wachttijd in minuten voor de situatie f(t) = 50exp((-1/2)t). Geef je eindantwoord als geheel getal. |
| 6 | De functie f wordt gegeven door f(x) = (3x - 7)^2. De grafiek van f wordt naar rechts en omhoog verschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g. De grafiek van g gaat door het punt A(5,40). De helling van de raaklijn in A aan de grafiek van g is -6. Stel op exacte wijze een functievoorschrift van g op. |
| 7 | De functie f wordt gegeven door f(x) = base2log(sqrt(1+8^x)). De functie g is de inverse functie van f. ~~In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven.~~ Het ~~gestippelde~~ lijnstuk ~~in de figuur~~ is het kortst mogelijke verticale lijnstuk dat de grafieken van f en g met elkaar verbindt. Bereken de lengte van dit lijnstuk. Geef je eindantwoord in twee decimalen. |
| 8 | De functie f wordt gegeven door f(x) = base2log(sqrt(1+8^x)). Op de grafiek van f ligt punt P met x-coördinaat p en punt Q met x-coördinaat p+1. Voor elke waarde van p kan het verschil yQ - yP worden bepaald. Onderzoek op exacte wijze of er een waarde van p is waarvoor dit verschil gelijk is aan 3. |
| 9 | Het punt P beweegt over een baan gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen: xp(t) = 4cos(t) + cos(4t), yp(t) = 4sin(t) + sin(4t), met t in seconden en 0 <= t <= 2pi. ~~De baan waarover punt P beweegt, is weergegeven in de figuur.~~ Het punt O beweegt ook over deze baan. Punt O loopt pi seconden voor op punt P. De bewegingsvergelijkingen van Q zijn dus: xq(t) = 4cos(t+pi) + cos(4(t+pi)), yq(t) = 4sin(t+pi) + sin(4(t+pi)), met t in seconden en 0 <= t <= 2pi. Er zijn twee momenten waarop P en Q recht boven elkaar liggen, dus dan geldt x\_p = x\_q. ~~In de figuur is zo’n situatie weergegeven.~~ Berekend exact de afstand tussen P en Q in deze situaties. |
| 10 | Het punt P beweegt over een baan gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen: xp(t) = 4cos(t) + cos(4t), yp(t) = 4sin(t) + sin(4t), met t in seconden en 0 <= t <= 2pi. Op tijdstip t = (2/3)pi bevindt het punt P zich in (-5/2, (5/2)sqrt(3)). Bereken exact de scherpe hoek in graden tussen de raaklijn aan de baan in punt P en de x as. |
| 11 | Gegeven zijn de punten A(-1, 0) en B(3, 0). Verder is gegeven de cirkel c met middellijn AB. De lijn k gaat door de oorsprong O en snijdt cirkel c in punt P. De afstand tussen O en P is gelijk is aan 5/2. ~~In figuur 1 zijn lijn k~~  ~~en de bovenste helft van cirkel c getekend.~~ Bereken exact de x-coördinaat van P. |
| 12 | Gegeven zijn de punten A(-1, 0) en B(3, 0). Verder is gegeven de cirkel c met middellijn AB. ~~In figuur 2 is de~~ De driehoek BRO ~~getekend met~~ heeft hoek BRO = 90°, punt R ligt boven de x-as en OR = 1. De lijn door B en R snijdt c in het punt S. Driehoek BSA is dan een driehoek met hoek ASB = 90°. ~~Vierhoek AORS is grijs~~  ~~weergegeven.~~ Bereken exact de oppervlakte van vierhoek AORS. |
| 13 | Voor elke waarde van a wordt de functie fa gegeven door: fa(x) = (ax^2-2)/(x^2+a). Er bestaat geen waarde van a waarvoor de grafiek van fa een perforatie heeft. Bewijs dit. |
| 14 | Voor elke waarde van a wordt de functie fa gegeven door: fa(x) = (ax^2-2)/(x^2+a). In het volgende onderdeel zijn de mogelijke waarden van a de positieve getallen, dus a > 0. De grafiek van fa heeft één top T en deze ligt op de y-as. Verder heeft de grafiek van fa een horizontale asymptoot. Punt S is het snijpunt van de horizontale asymptoot en de y-as. ~~Als voorbeeld is in de figuur de grafiek van f3 weergegeven.~~ De lengte van lijnstuk ST is afhankelijk van a. Deze lengte heeft een minimum. Bereken exact voor welke positieve waarde van a de lengte van lijnstuk ST minimaal is. |
| 15 | De Wet van Titius-Bode is een wet uit de astronomie die door Johann Titius werd opgesteld in de achttiende eeuw. Deze wet legt een verband tussen het rangnummer van een planeet en de afstand van die planeet tot de zon. Met het rangnummer van een planeet wordt bedoeld: ‘de zoveelste planeet geteld vanaf de zon’. De planeet die het dichtst bij de zon staat krijgt nummer 1, de volgende 2 enzovoorts. De wet luidt: a = 0,4 +0,3\*2^(n-2). Hierin is a de afstand van de planeet tot de zon uitgedrukt in AE (Astronomische Eenheid, 1 AE = afstand van de aarde tot de zon) en is n het rangnummer van de planeet. Saturnus heeft volgens de Wet van Titius-Bode een afstand van 10 AE tot de zon. Bereken exact welk rangnummer Saturnus dan zou hebben. |
| 16 | We bekijken de planeten Mars, Venus en de aarde. We gaan uit van het volgende eenvoudige model: De drie planeten draaien ieder in een cirkelvormige baan met de zon als middelpunt. De drie banen liggen in één plat vlak. De afstand van Venus tot de zon is 0,7 AE, de afstand van de aarde tot de zon is 1,0 AE en de afstand van Mars tot de zon is 1,6 AE. Het is mogelijk dat de drie planeten op één lijn liggen waarbij Venus precies midden tussen Mars en de aarde in ligt. ~~Deze situatie is~~  ~~weergegeven in figuur 1.~~ De afstand in AE van de aarde tot Venus is d en hoek AVZ in graden is α. ~~Met behulp van figuur 1 kan het~~ Het volgende verband tussen d en alpha kan worden gevonden: (d^2 - 0,51)/cos(α) = (d^2 - 2,07)/cos(180° - α). Bewijs dat dit verband juist is. |
| 17 | We bekijken de planeten Mars, Venus en de aarde. We gaan uit van het volgende eenvoudige model: De drie planeten draaien ieder in een cirkelvormige baan met de zon als middelpunt. De drie banen liggen in één plat vlak. De afstand van Venus tot de zon is 0,7 AE, de afstand van de aarde tot de zon is 1,0 AE en de afstand van Mars tot de zon is 1,6 AE. Het is mogelijk dat de drie planeten op één lijn liggen waarbij Venus precies midden tussen Mars en de aarde in ligt. Bereken algebraïsch de afstand in AE van de aarde tot Venus in de gegeven situatie. Geef je eindantwoord in twee decimalen. |
| 18 | Meestal wordt gezegd dat de planeten in ons zonnestelsel om de zon draaien. Dat klopt echter niet helemaal: de zon en de planeten draaien allemaal om hun gemeenschappelijke zwaartepunt. Stel dat het zonnestelsel alleen zou bestaan uit Jupiter en de zon. We beschouwen deze twee hemellichamen als twee puntmassa’s. Jupiter is verreweg de zwaarste planeet in ons zonnestelsel met een massa van 2.10^27 kg en een afstand tot de zon van 8.10^8 km. De zon heeft een massa van 2.10^30 kg. ~~Zie figuur 2 (niet op schaal). De kleine cirkel in figuur 2 is de baan van de zon om het zwaartepunt.~~ Bereken de straal van de baan van de zon om het zwaartepunt in km. Geef je eindantwoord in honderdduizendtallen. |