QUESTION NUMBER: 1

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

43 811 854 448

TIME TAKEN: 11.4685 seconds

OUTPUT:

We are given the function \( f(x) = 2x + \frac{1}{x} \) for \( x > 0 \). To find the minimum value of \( f(x) \), we'll first find the critical points by setting the first derivative to zero.

Compute the derivative of \( f(x) \):

\[ f'(x) = \frac{d}{dx} [2x + \frac{1}{x}] = 2 - \frac{1}{x^2} \]

Set the derivative equal to zero to find critical points:

\[ 2 - \frac{1}{x^2} = 0 \]

\[ \frac{1}{x^2} = 2 \]

\[ x^2 = \frac{1}{2} \]

\[ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \] (since \( x > 0 \))

Now, evaluate \( f(x) \) at \( x = \frac{\sqrt{2}}{2} \):

\[ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \]

\[ = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \]

\[ = \sqrt{2} + \sqrt{2} \]

\[ = 2\sqrt{2} \]

So, the exact minimum value of \( f(x) \) is \( 2\sqrt{2} \).

\*\*Answer:\*\* \(2\sqrt{2}\)

QUESTION NUMBER: 2

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

102 1273 1375 640

TIME TAKEN: 14.3307 seconds

OUTPUT:

Om te bewijzen dat de oppervlakte van het vlakdeel \( V \), ingesloten door de grafiek van \( f(x) = 2x + \frac{1}{x} \), de rechte \( k \) (de scheve asymptoot), en de lijnen \( x = a \) en \( x = 2a \) met \( a > 0 \), onafhankelijk is van \( a \), voeren we de volgende stappen uit:

\*\*Stap 1: Bepaal de scheve asymptoot \( k \).\*\*

Voor \( x \to \infty \) nadert \( \frac{1}{x} \) naar 0, dus de functie \( f(x) \) nadert \( 2x \). Daarom is de scheve asymptoot \( k \) de lijn \( y = 2x \).

\*\*Stap 2: Bepaal het verschil tussen \( f(x) \) en de asymptoot \( k \).\*\*

We berekenen \( f(x) - k(x) \):

\[

f(x) - 2x .= \left(2x + \frac{1}{x}\right) - 2x = \frac{1}{x}

\]

\*\*Stap 3: Bereken de oppervlakte tussen \( f(x) \) en \( k \) van \( x = a \) tot \( x = 2a \).\*\*

De oppervlakte \( A \) wordt gegeven door de integraal van het verschil tussen \( f(x) \) en \( k(x) \):

\[

A = \int\_{x = a}^{x = 2a} [f(x) - k(x)]\, dx = \int\_{a}^{2a} \frac{1}{x}\, dx

\]

\*\*Stap 4: Evalueer de integraal.\*\*

\[

A = \int\_{a}^{2a} \frac{1}{x}\, dx = \left[ \ln|x| \right]\_{a}^{2a} = \ln(2a) - \ln(a) = \ln\left(\frac{2a}{a}\right) = \ln(2)

\]

\*\*Conclusie:\*\*

De oppervlakte \( A = \ln(2) \) is een constante en is onafhankelijk van \( a \). Dus de oppervlakte van het vlakdeel \( V \) is inderdaad onafhankelijk van de waarde van \( a \).

\*\*Antwoord:\*\* Omdat ∫ₐ²ₐ (1⁄x)dx = ln 2, is de oppervlakte tussen de grafiek en de asymptoot van x = a tot x = 2a gelijk aan ln 2 en dus onafhankelijk van a.

QUESTION NUMBER: 3

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

96 5733 5829 5056

TIME TAKEN: 47.5037 seconds

OUTPUT:

Om de inhoud van het omwentelingslichaam te berekenen, moeten we eerst de grenzen van de integratie bepalen door de snijpunten van de functies \(f(x) = 2x + \frac{1}{x}\) en \(y = 3\) te vinden.

\(2x + \frac{1}{x} = 3\)

Vermenigvuldig beide kanten met \(x\):

\(2x^2 + 1 = 3x\)

Herleid:

\(2x^2 - 3x + 1 = 0\)

Los de kwadratische vergelijking op:

\(x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}\)

Dus \(x = 1\) of \(x = \frac{1}{2}\).

Omdat we het gebied tussen de grafiek van \(f(x)\) en de lijn \(y = 3\) roteren rond \(y = 3\), en aangezien \(f(x)\) onder \(y = 3\) ligt tussen \(x = \frac{1}{2}\) en \(x = 1\), is de straal van rotatie \(r(x) = 3 - f(x)\).

De inhoud \(V\) is dan:

\[

V = \pi \int\_{\frac{1}{2}}^{1} [3 - (2x + \frac{1}{x})]^2 dx

\]

Dit vereenvoudigt tot:

\[

V = \pi \int\_{\frac{1}{2}}^{1} \left(4x^2 - 12x + 13 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx

\]

Bereken de integraal:

\[

V = \pi \left[ \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 13x - 6\ln|x| - \frac{1}{x} \right]\_{\frac{1}{2}}^{1}

\]

Vul de grenzen in en bereken het verschil:

\[

V = \pi \left[ \left( \frac{4}{3}(1) - 6(1) + 13(1) - 6\ln(1) - 1 \right) - \left( \frac{4}{3}\left( \frac{1}{8} \right) - 6\left( \frac{1}{4} \right) + 13\left( \frac{1}{2} \right) - 6\ln\left( \frac{1}{2} \right) - 2 \right) \right]

\]

Na berekening krijgen we:

\[

V \approx \pi (7.3333 - 7.3256) = \pi \times 0.0077 \approx 0.0244

\]

Dus de inhoud van het omwentelingslichaam is ongeveer 0,02 (op twee decimalen).

\*\*Antwoord:\*\* 0,02

>>

QUESTION NUMBER: 4

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

361 2373 2734 1536

TIME TAKEN: 56.1731 seconds

OUTPUT:

Om het percentage te berekenen waarmee de oppervlakte groter wordt, moeten we de oppervlakte van het oorspronkelijke rechthoek ABCD en de oppervlakte van de gebogen vorm A'B'C'D' vinden.

\*\*Stap 1: Bereken de oppervlakte van ABCD.\*\*

De lengte van ABCD is gelijk aan de lengte van PQ, en de hoogte is d. De lengte van de neutrale lijn blijft gelijk bij het buigen, dus:

Lengte van PQ \( = \) lengte van boog P'Q' \( = \theta \times r = \frac{\pi}{4} \times 2{,}4d = 0{,}6\pi d \)

Waar \( \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \) radialen en \( r = 2{,}4d \) is de straal van de neutrale lijn.

Dus de oppervlakte van ABCD is:

Oppervlakte ABCD \( = \) lengte \( \times \) breedte \( = 0{,}6\pi d \times d = 0{,}6\pi d^2 \)

\*\*Stap 2: Bereken de oppervlakte van A'B'C'D'.\*\*

A'B'C'D' is een sector van een ring met een hoek van 45°, tussen radii 2d en 3d. De oppervlakte van deze sector is:

Oppervlakte A'B'C'D' \( = \frac{\theta}{2} (r\_{\text{buiten}}^2 - r\_{\text{binnen}}^2) = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2} ( (3d)^2 - (2d)^2 ) = \frac{1}{8} \pi (9d^2 - 4d^2) = \frac{5}{8}\pi d^2 \)

\*\*Stap 3: Bereken het percentage waarmee de oppervlakte toeneemt.\*\*

Het verschil in oppervlakte is:

Toename \( = \) Oppervlakte A'B'C'D' \( - \) Oppervlakte ABCD \( = \frac{5}{8}\pi d^2 - 0{,}6\pi d^2 = \pi d^2 \left( \frac{5}{8} - 0{,}6 \right) \)

Eerst berekenen we \( \frac{5}{8} - 0{,}6 = \frac{5}{8} - \frac{3}{5} = \frac{25}{40} - \frac{24}{40} = \frac{1}{40} \)

Dus de toename is \( \frac{1}{40} \pi d^2 \)

Het percentage toename is dan:

Percentage toename \( = \frac{\text{Toename}}{\text{Oorspronkelijke oppervlakte}} \times 100\% = \frac{ \frac{1}{40} \pi d^2 }{ 0{,}6\pi d^2 } \times 100\% = \frac{1}{40} \div 0{,}6 \times 100\% = \frac{1}{40} \times \frac{1}{0{,}6} \times 100\% \)

Aangezien \( \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3} \), wordt dit:

Percentage toename \( = \frac{1}{40} \times \frac{5}{3} \times 100\% = \frac{5}{120} \times 100\% = \frac{5}{120} \times 100\% = \frac{25}{6}\% \)

Dit is ongeveer \( 4{,}1666\% \), wat afgerond 4% is.

QUESTION NUMBER: 5

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

313 993 1306 576

TIME TAKEN: 11.6696 seconds

OUTPUT:

Om de kracht uit te rekenen die nodig is om de metalen plaat op een matrijs met een opening van 100 mm te buigen, gebruiken we formule (1):

\[ F = \frac{R \cdot d^2}{V} \left(1 + \frac{4d}{V}\right) \]

Eerst bepalen we de constante \( R \) met de gegeven waarden:

- Voor \( d = 10 \) mm en \( V = 200 \) mm is \( F = 420 \) kN/m.

Invullen in de formule geeft:

\[ 420 = \frac{R \cdot 10^2}{200} \left(1 + \frac{4 \cdot 10}{200}\right) \]

\[ 420 = \frac{R \cdot 100}{200} \left(1 + \frac{40}{200}\right) \]

\[ 420 = \frac{R \cdot 0.5}{1} \cdot (1 + 0.2) \]

\[ 420 = R \cdot 0.5 \cdot 1.2 \]

\[ 420 = R \cdot 0.6 \]

\[ R = \frac{420}{0.6} \]

\[ R = 700 \]

Nu kunnen we \( F \) berekenen voor \( V = 100 \) mm:

\[ F = \frac{700 \cdot 10^2}{100} \left(1 + \frac{4 \cdot 10}{100}\right) \]

\[ F = \frac{700 \cdot 100}{100} (1 + 0.4) \]

\[ F = 700 \cdot 1 \cdot 1.4 \]

\[ F = 700 \cdot 1.4 \]

\[ F = 980 \]

\*\*Antwoord:\*\* 980

QUESTION NUMBER: 6

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

300 2185 2485 1536

TIME TAKEN: 26.6666 seconds

OUTPUT:

To solve this problem, let's follow the steps outlined:

1. \*\*Combine the two formulas\*\* to express \( F \) in terms of \( R \) and \( d \) only.

Given:

\[

F = \frac{R d^2}{V} \left(1 + \frac{4d}{V}\right) \tag{1}

\]

and

\[

V = d^{1.75} \tag{2}

\]

Substitute \( V \) from equation (2) into equation (1):

\[

F = \frac{R d^2}{d^{1.75}} \left(1 + \frac{4d}{d^{1.75}}\right)

\]

Simplify inside the parentheses:

\[

1 + \frac{4d}{d^{1.75}} = 1 + 4d^{1 - 1.75} = 1 + 4d^{-0.75}

\]

Now, multiply through:

\[

F = R d^{2 - 1.75} \left(1 + 4d^{-0.75}\right) = R d^{0.25} \left(1 + 4d^{-0.75}\right)

\]

Distribute \( R \):

\[

F = R d^{0.25} + 4R d^{0.25} d^{-0.75} = R d^{0.25} + 4R d^{-0.5}

\]

2. \*\*Find \( d \) that minimizes \( F \).\*\*

Let \( f(d) = R d^{0.25} + 4R d^{-0.5} \).

To minimize \( f(d) \), find its derivative and set it to zero:

\[

f'(d) = R \left(\frac{1}{4} d^{-0.75} - 2 d^{-1.5}\right)

\]

Set \( f'(d) = 0 \):

\[

\frac{1}{4} d^{-0.75} - 2 d^{-1.5} = 0

\]

Multiply both sides by \( 4d^{1.5} \) to eliminate denominators:

\[

d^{0.75} - 8 = 0

\]

So:

\[

d^{0.75} = 8

\]

Solve for \( d \) by raising both sides to the power \( \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3} \):

\[

d = 8^{\frac{4}{3}}

\]

Since \( 8^{\frac{1}{3}} = 2 \), we have:

\[

d = (2)^4 = 16

\]

\*\*Answer:\*\* 16

QUESTION NUMBER: 7

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

137 1219 1356 576

TIME TAKEN: 16.1638 seconds

OUTPUT:

To prove that the given equations \( x\_Q(t) = t + t^2 \) and \( y\_Q(t) = t^2 - t \) correctly describe the motion of point \( Q \), we'll follow these steps:

\*\*1. Find the coordinates of point \( M \):\*\*

Since \( M \) is the midpoint of \( OP \), where \( O \) is the origin \((0, 0)\) and \( P \) has coordinates:

\[

x\_P(t) = 2t, \quad y\_P(t) = 2t^2

\]

The coordinates of \( M \) are:

\[

x\_M(t) = \frac{x\_O + x\_P(t)}{2} = \frac{0 + 2t}{2} = t

\]

\[

y\_M(t) = \frac{y\_O + y\_P(t)}{2} = \frac{0 + 2t^2}{2} = t^2

\]

\*\*2. Find vector \( \vec{MP} \):\*\*

Vector \( \vec{MP} \) is from \( M \) to \( P \):

\[

\vec{MP} = \left( x\_P(t) - x\_M(t), \, y\_P(t) - y\_M(t) \right) = (2t - t, \, 2t^2 - t^2) = (t, \, t^2)

\]

\*\*3. Rotate vector \( \vec{MP} \) 90 degrees clockwise to get \( \vec{MQ} \):\*\*

Rotating a vector \( (a, b) \) 90 degrees clockwise yields \( (b, -a) \):

\[

\vec{MQ} = (t^2, \, -t)

\]

\*\*4. Find the coordinates of point \( Q \):\*\*

Since \( \vec{MQ} \) is from \( M \) to \( Q \):

\[

x\_Q(t) = x\_M(t) + (\vec{MQ})\_x = t + t^2 = t + t^2

\]

\[

y\_Q(t) = y\_M(t) + (\vec{MQ})\_y = t^2 + (-t) = t^2 - t

\]

\*\*Conclusion:\*\*

The derived coordinates of \( Q \) match the given equations:

\[

x\_Q(t) = t + t^2, \quad y\_Q(t) = t^2 - t

\]

Thus, we've proven that these are indeed the motion equations of \( Q \).

\*\*Answer:\*\* By deriving Q’s coordinates as shown, we confirm that x₍Q₎ = t + t² and y₍Q₎ = t² – t.

QUESTION NUMBER: 8

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

171 2421 2592 1600

TIME TAKEN: 26.1878 seconds

OUTPUT:

To solve this problem, we need to compute the speeds of points \( P \) and \( Q \) at any time \( t \) and find the ratio \( c \) such that \( \text{speed of }P = c \times \text{speed of }Q \).

\*\*1. Compute the velocity of point \( P \):\*\*

Given the position of \( P \):

\[

x\_P(t) = 2t, \quad y\_P(t) = 2t^2

\]

Compute the derivatives to find the velocity components:

\[

\frac{dx\_P}{dt} = 2, \quad \frac{dy\_P}{dt} = 4t

\]

Compute the speed of \( P \):

\[

v\_P = \sqrt{\left( \frac{dx\_P}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy\_P}{dt} \right)^2} = \sqrt{2^2 + (4t)^2} = \sqrt{4 + 16t^2}

\]

\*\*2. Compute the velocity of point \( Q \):\*\*

First, note that \( M \) is the midpoint of \( OP \), so its coordinates are:

\[

x\_M = \frac{x\_P}{2} = t, \quad y\_M = \frac{y\_P}{2} = t^2

\]

Vector \( MP \) is:

\[

MP = (x\_P - x\_M, y\_P - y\_M) = (2t - t, 2t^2 - t^2) = (t, t^2)

\]

Rotating \( MP \) 90 degrees clockwise about \( M \), we get \( MQ \):

\[

MQ = (t^2, -t)

\]

So the coordinates of \( Q \) are:

\[

x\_Q(t) = x\_M + t^2 = t + t^2, \quad y\_Q(t) = y\_M - t = t^2 - t

\]

Compute the derivatives:

\[

\frac{dx\_Q}{dt} = 1 + 2t, \quad \frac{dy\_Q}{dt} = 2t - 1

\]

Compute the speed of \( Q \):

\[

v\_Q = \sqrt{\left( \frac{dx\_Q}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy\_Q}{dt} \right)^2}

\]

Simplify the expression under the square root:

\[

\left(1 + 2t\right)^2 + \left(2t - 1\right)^2 = [1 + 4t + 4t^2] + [4t^2 - 4t + 1] = 2 + 8t^2

\]

So,

\[

v\_Q = \sqrt{2 + 8t^2}

\]

\*\*3. Compute the ratio \( c \):\*\*

Notice that:

\[

v\_P = \sqrt{4 + 16t^2} = \sqrt{4(1 + 4t^2)} = 2\sqrt{1 + 4t^2}

\]

\[

v\_Q = \sqrt{2 + 8t^2} = \sqrt{2(1 + 4t^2)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + 4t^2}

\]

Therefore,

\[

c = \frac{v\_P}{v\_Q} = \frac{2\sqrt{1 + 4t^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + 4t^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}

\]

\*\*Answer:\*\*

\(\displaystyle c = \sqrt{2}\)

QUESTION NUMBER: 9

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

181 2181 2362 1216

TIME TAKEN: 25.1696 seconds

OUTPUT:

Om te bewijzen dat \( L = |t| \sqrt{2t^2 + 2} \), zullen we de lengte van het lijnstuk \( PQ \) bepalen als functie van \( t \).

\*\*Stap 1: Bepaal de coördinaten van punten \( P \), \( M \) en \( Q \).\*\*

We hebben:

- Punt \( P \) heeft coördinaten \( P(t) = \left( x\_P(t), y\_P(t) \right) = \left( 2t, 2t^2 \right) \).

- Punt \( O \) is de oorsprong \( (0, 0) \).

- Middelpunt \( M \) van lijnstuk \( OP \) is:

\[

M = \frac{O + P}{2} = \left( \frac{0 + 2t}{2}, \frac{0 + 2t^2}{2} \right) = \left( t, t^2 \right).

\]

\*\*Stap 2: Bepaal vector \( MP \) en roteer deze.\*\*

Vector \( MP \) is:

\[

MP = P - M = \left( 2t - t, 2t^2 - t^2 \right) = \left( t, t^2 \right).

\]

We roteren \( MP \) over 90 graden rechtsom (met de klok mee) rond \( M \). Rotatie over 90 graden rechtsom van een vector \( (a, b) \) resulteert in \( (b, -a) \). Dus de geroteerde vector \( MQ \) is:

\[

MQ = \left( t^2, -t \right).

\]

\*\*Stap 3: Vind de coördinaten van punt \( Q \).\*\*

Punt \( Q \) is dan:

\[

Q = M + MQ = \left( t, t^2 \right) + \left( t^2, -t \right) = \left( t + t^2, t^2 - t \right).

\]

\*\*Stap 4: Bereken vector \( PQ \).\*\*

Vector \( PQ \) is:

\[

PQ = Q - P = \left( t + t^2 - 2t, t^2 - t - 2t^2 \right) = \left( t^2 - t, -t^2 - t \right).

\]

\*\*Stap 5: Bereken de lengte \( L \) van \( PQ \).\*\*

De lengte is:

\[

L = \| PQ \| = \sqrt{(t^2 - t)^2 + (-t^2 - t)^2}.

\]

Bereken de kwadraten:

\[

\begin{align\*}

(t^2 - t)^2 &= t^4 - 2t^3 + t^2, \\

(-t^2 - t)^2 &= (t^2 + t)^2 = t^4 + 2t^3 + t^2.

\end{align\*}

\]

Tel ze op:

\[

L^2 = t^4 - 2t^3 + t^2 + t^4 + 2t^3 + t^2 = 2t^4 + 2t^2.

\]

\*\*Stap 6: Vereenvoudig en trek de wortel.\*\*

\[

L^2 = 2t^2 (t^2 + 1), \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{2t^2 (t^2 + 1)} = |t| \sqrt{2t^2 + 2}.

\]

We hebben de absolute waarde van \( t \) omdat lengte altijd positief is.

\*\*Conclusie:\*\*

We hebben bewezen dat:

\[

L = |t| \sqrt{2t^2 + 2}.

\]

\*\*\*Dus, voor elke waarde van \( t \) geldt dat \( L = |t| \sqrt{2t^2 + 2} \).\*\*\*

Antwoord: Omdat L = |t| × √(2 t² ＋ 2) dus inderdaad geldt L = |t|·√(2t² ＋ 2).

QUESTION NUMBER: 10

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

281 1999 2280 1344

TIME TAKEN: 22.9038 seconds

OUTPUT:

To find the value to which the derivative of \( L(t) \) approaches as \( t \) approaches 0 from the left, we start by examining the expression for \( L(t) \) when \( t < 0 \).

Given \( L = |t| \cdot \sqrt{2t^2 + 2} \), and since \( t < 0 \), \( |t| = -t \). Therefore,

\[ L(t) = -t \cdot \sqrt{2t^2 + 2}. \]

Let’s denote \( s(t) = \sqrt{2t^2 + 2} \). Then,

\[ L(t) = -t \cdot s(t). \]

Compute the derivative \( \frac{dL}{dt} \):

\[ \frac{dL}{dt} = -s(t) + (-t) \cdot s'(t). \]

Compute \( s'(t) \):

\[ s'(t) = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{2t^2 + 2} \right) = \frac{1}{2} \cdot (2t^2 + 2)^{-1/2} \cdot 4t = \frac{2t}{s(t)}. \]

Substitute \( s'(t) \) back into the derivative:

\[ \frac{dL}{dt} = -s(t) - t \cdot \frac{2t}{s(t)} = -s(t) - \frac{2t^2}{s(t)}. \]

Combine the terms over a common denominator:

\[ \frac{dL}{dt} = \frac{ -s(t) \cdot s(t) - 2t^2 }{ s(t) } = \frac{ -[2t^2 + 2] - 2t^2 }{ s(t) }. \]

Simplify the numerator:

\[ -[2t^2 + 2] - 2t^2 = -2t^2 - 2 - 2t^2 = -4t^2 - 2. \]

Therefore,

\[ \frac{dL}{dt} = \frac{ -4t^2 - 2 }{ \sqrt{2t^2 + 2} }. \]

As \( t \to 0^- \), \( t^2 \to 0 \), so:

\[ \lim\_{t \to 0^-} (-4t^2 - 2) = -2, \]

\[ \lim\_{t \to 0^-} \sqrt{2t^2 + 2} = \sqrt{2}. \]

Thus, the limit of the derivative is:

\[ \lim\_{t \to 0^-} \frac{dL}{dt} = \frac{ -2 }{ \sqrt{2} } = -\sqrt{2}. \]

\*\*Answer: \(-\sqrt{2}\)\*\*

QUESTION NUMBER: 11

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

99 5396 5495 4544

TIME TAKEN: 68.484 seconds

OUTPUT:

To solve this problem, we'll use the given information step by step.

\*\*Step 1: Understand the given function and find the maxima\*\*

The function \( f(x) = |\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3}| \) involves an absolute value of a sine function shifted vertically by \( \frac{1}{2}\sqrt{3} \). The maxima of \( f(x) \) occur where \( \sin(x) \) reaches its maximum value of 1.

Compute the maxima:

1. \( \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \), so the first maximum occurs at \( x = \frac{\pi}{2} \).

2. The next maximum occurs after a full period of \( 2\pi \), so at \( x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \).

At these points:

- \( f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left|1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right| = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \).

- \( f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \).

So, both maxima are at the same height.

\*\*Step 2: Find the sinusoidal function \( g(x) = a + b\sin(x) \)\*\*

We are told that \( g(x) \) has two successive maxima at the same points \( A \) and \( B \) as \( f(x) \). This means:

1. The maxima of \( g(x) \) occur at \( x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \).

2. At these points, \( g(x) \) should equal \( f(x) \).

Set up equations using the fact that the maximum of \( g(x) \) is \( a + b \) and the minimum is \( a - b \):

1. At \( x = \frac{\pi}{2} \):

\( g\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \).

2. At \( x = \frac{3\pi}{2} \) (where \( \sin(x) \) is at a minimum):

\( g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = a - b = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \).

\*\*Step 3: Solve for \( a \) and \( b \)\*\*

Add the two equations:

\[

\begin{align\*}

(a + b) + (a - b) &= \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\

2a &= 2 \\

a &= 1

\end{align\*}

\]

Subtract the second equation from the first:

\[

\begin{align\*}

(a + b) - (a - b) &= \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\

2b &= \sqrt{3} \\

b &= \frac{\sqrt{3}}{2}

\end{align\*}

\]

\*\*Answer:\*\*

An explicit answer: a = 1 and b = (½)·√3; that is, a = 1 and b = (1⁄2)·√3.

>>

QUESTION NUMBER: 12

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

68 2744 2812 1920

TIME TAKEN: 30.7972 seconds

OUTPUT:

We are given the function \( f(x) = \left| \sin(x) + \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \right| \).

\*\*Step 1: Find where the function equals zero\*\*

To find the small regions (where the function dips below zero before taking the absolute value), we set the inside of the absolute value to zero:

\[

\sin(x) + \dfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0 \\

\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}

\]

The solutions to \( \sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \) in the interval \( [0, 2\pi) \) are:

\[

x\_1 = \dfrac{4\pi}{3} \quad \text{and} \quad x\_2 = \dfrac{5\pi}{3}

\]

\*\*Step 2: Set up the integral for the area of one small region\*\*

Since the function is negative between \( x\_1 \) and \( x\_2 \), the absolute value will make it positive. Thus, the area \( A \) of one small region is:

\[

A = \int\_{x\_1}^{x\_2} \left| \sin(x) + \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \right| dx = \int\_{x\_1}^{x\_2} \left( -\sin(x) - \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \right) dx

\]

\*\*Step 3: Integrate\*\*

Compute the integral:

\[

A = \int\_{x\_1}^{x\_2} \left( -\sin(x) - \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \right) dx = \left[ \cos(x) \right]\_{x\_1}^{x\_2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \left( x\_2 - x\_1 \right)

\]

Calculate \( \cos(x) \) at the bounds:

\[

\cos\left( \dfrac{4\pi}{3} \right) = -\dfrac{1}{2}, \quad \cos\left( \dfrac{5\pi}{3} \right) = \dfrac{1}{2}

\]

Compute the differences:

\[

\left[ \cos(x) \right]\_{x\_1}^{x\_2} = \cos\left( \dfrac{5\pi}{3} \right) - \cos\left( \dfrac{4\pi}{3} \right) = \dfrac{1}{2} - \left( -\dfrac{1}{2} \right) = 1

\]

Compute \( x\_2 - x\_1 \):

\[

x\_2 - x\_1 = \dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}

\]

Therefore, the area is:

\[

A = 1 - \dfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \dfrac{\pi}{3} = 1 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}

\]

\*\*Conclusion:\*\*

The exact area of a single small region enclosed by the graph of \( f \) and the \( x \)-axis is:

\[

A = 1 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}

\]

\*\*Answer:\*\* \(A\;=\;1\;-\;\dfrac{\pi\,\sqrt{3}}{6}\)

QUESTION NUMBER: 13

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

70 1604 1674 832

TIME TAKEN: 19.291 seconds

OUTPUT:

To prove that the tangent lines to the graphs of \( f(x) = \ln(x) \) and \( g(x) = 1 + e^2(1 - \ln(x)) \) at their point of intersection are perpendicular, we'll follow these steps:

1. \*\*Find the point of intersection of \( f \) and \( g \).\*\*

2. \*\*Calculate the derivatives \( f'(x) \) and \( g'(x) \) to find the slopes of the tangent lines at the point of intersection.\*\*

3. \*\*Show that the product of the slopes is \( -1 \), which means the lines are perpendicular.\*\*

\*\*Step 1: Find the point of intersection.\*\*

Set \( f(x) = g(x) \):

\[

\ln(x) = 1 + e^2(1 - \ln(x))

\]

Simplify and solve for \( x \):

\[

\begin{align\*}

\ln(x) &= 1 + e^2(1 - \ln(x)) \\

\ln(x) &= 1 + e^2 - e^2\ln(x) \\

\ln(x) + e^2\ln(x) &= 1 + e^2 \\

\ln(x)(1 + e^2) &= 1 + e^2 \\

\ln(x) &= \frac{1 + e^2}{1 + e^2} \\

\ln(x) &= 1 \\

x &= e

\end{align\*}

\]

So, the functions intersect at \( x = e \). Evaluate \( f(e) \) and \( g(e) \):

\[

f(e) = \ln(e) = 1,\quad g(e) = 1 + e^2(1 - \ln(e)) = 1 + e^2(1 - 1) = 1

\]

Therefore, the point of intersection is \( (e, 1) \).

\*\*Step 2: Calculate the derivatives to find the slopes of the tangent lines.\*\*

Compute \( f'(x) \):

\[

f'(x) = \frac{1}{x}

\]

\[

f'(e) = \frac{1}{e}

\]

Compute \( g'(x) \):

\[

g(x) = 1 + e^2(1 - \ln(x)) \\

g'(x) = e^2 \left( 0 - \frac{1}{x} \right) = -\frac{e^2}{x}

\]

\[

g'(e) = -\frac{e^2}{e} = -e

\]

\*\*Step 3: Show that the product of the slopes is \( -1 \).\*\*

Multiply the slopes:

\[

f'(e) \cdot g'(e) = \left( \frac{1}{e} \right)(-e) = -1

\]

Since the product of the slopes is \( -1 \), the tangent lines are perpendicular at the point \( (e, 1) \).

\*\*Conclusion:\*\*

The tangent lines to the graphs of \( f \) and \( g \) at their point of intersection are perpendicular because the product of their slopes at that point is \( -1 \).

\*\*Answer:\*\* Because at their intersection point the slopes satisfy f ′(e)·g ′(e) = –1, the tangent lines meet at right angles.

QUESTION NUMBER: 14

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

106 6397 6503 5888

TIME TAKEN: 70.6273 seconds

OUTPUT:

To solve for \( q \), we start by finding the \( x \)-coordinates of points \( A \) and \( B \). From the given functions:

1. Point \( A \) lies on \( g(x) \): \( q = g(x\_A) = 1 + e^2 (1 - \ln(x\_A)) \).

2. Point \( B \) lies on \( f(x) \): \( q = f(x\_B) = \ln(x\_B) \).

Rewriting the equation for \( x\_A \):

\( q - 1 = e^2 (1 - \ln(x\_A)) \)

\( \ln(x\_A) = 1 - \frac{q - 1}{e^2} \).

So,

\( x\_A = e^{1 - \frac{q - 1}{e^2}} \).

For \( x\_B \):

\( x\_B = e^{q} \).

Since \( A \) is to the left of \( B \) and \( AB = 3 \), we have:

\( x\_B - x\_A = 3 \).

Substitute \( x\_A \) and \( x\_B \):

\( e^{q} - e^{1 - \frac{q - 1}{e^2}} = 3 \).

Let \( u = e^{q} \), so:

\( u - e^{1 + \frac{1}{e^2}} u^{-\frac{1}{e^2}} = 3 \).

Compute the constants (using \( e^2 \approx 7.3891 \)):

\( e^{1 + \frac{1}{e^2}} \approx 3.1111 \),

\( \frac{1}{e^2} \approx 0.1353 \).

The equation becomes:

\( u - 3.1111 \cdot u^{-0.1353} = 3 \).

This nonlinear equation can be solved numerically. Using methods like the bisection method or Newton-Raphson, we find:

\( u \approx 5.4717 \).

Therefore, \( q = \ln(u) \approx \ln(5.4717) \approx 1.7004 \).

Rounded to one decimal place, the value of \( q \) is \*\*1.7\*\*.

\*\*Answer:\*\* 1.7

QUESTION NUMBER: 15

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

114 3908 4022 2624

TIME TAKEN: 40.3718 seconds

OUTPUT:

To prove that the line through points E and F is the angle bisector of angle PED for \( p = -2 \), we will carefully compute the coordinates of the relevant points and the angles formed at point E.

\*\*Step 1: Determine Coordinates of Relevant Points\*\*

Given rectangle \( OABC \) with vertices:

- \( O(0, 0) \)

- \( A(8, 0) \)

- \( B(8, 4) \)

- \( C(0, 4) \)

Midpoint \( F \) of \( OA \):

\[

F = \left( \frac{0 + 8}{2}, \frac{0 + 0}{2} \right) = (4, 0)

\]

Midpoint \( E \) of \( BC \):

\[

E = \left( \frac{8 + 0}{2}, \frac{4 + 4}{2} \right) = (4, 4)

\]

Point \( P \) on the negative y-axis with \( p = -2 \):

\[

P = (0, -2)

\]

We need to find point \( D \), the intersection of the line \( PF \) extended and line \( AC \).

Equation of line \( PF \):

\[

\text{Slope } m\_{PF} = \frac{0 - (-2)}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\

y + 2 = \frac{1}{2} x

\]

Equation of line \( AC \):

\[

\text{Slope } m\_{AC} = \frac{4 - 0}{0 - 8} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \\

y = -\frac{1}{2}(x - 8)

\]

Setting \( y \) from both equations equal to find \( D \):

\[

\frac{1}{2} x - 2 = -\frac{1}{2} x + 4 \\

\Rightarrow x = 6 \\

\]

Then \( y = \frac{1}{2} \times 6 - 2 = 1 \).

So point \( D \) is at \( (6, 1) \).

\*\*Step 2: Calculate Direction Vectors\*\*

Vectors from \( E \):

- \( \overrightarrow{EP} = P - E = (0 - 4, -2 - 4) = (-4, -6) \)

- \( \overrightarrow{ED} = D - E = (6 - 4, 1 - 4) = (2, -3) \)

\*\*Step 3: Compute Angle Between Vectors \( \overrightarrow{EP} \) and \( \overrightarrow{ED} \)\*\*

Use the dot product formula:

\[

\cos \theta = \frac{\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{ED}}{|\overrightarrow{EP}| \cdot |\overrightarrow{ED}|}

\]

Compute the dot product:

\[

\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{ED} = (-4)(2) + (-6)(-3) = -8 + 18 = 10

\]

Compute the magnitudes:

\[

|\overrightarrow{EP}| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} \\

|\overrightarrow{ED}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}

\]

Compute the cosine:

\[

\cos \theta = \frac{10}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{676}} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}

\]

So,

\[

\theta = \arccos\left( \frac{5}{13} \right) \approx 67.38^\circ

\]

\*\*Step 4: Compute Angles Between Each Vector and the Vertical Line \( x = 4 \) (Line \( EF \))\*\*

For vector \( \overrightarrow{EP} = (-4, -6) \):

\[

\text{Angle with vertical} = \arctan\left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) = \arctan\left( \frac{-4}{-6} \right) = \arctan\left( \frac{2}{3} \right) \approx 33.69^\circ

\]

For vector \( \overrightarrow{ED} = (2, -3) \):

\[

\text{Angle with vertical} = \arctan\left( \frac{2}{-3} \right) = -\arctan\left( \frac{2}{3} \right) \approx -33.69^\circ

\]

\*\*Step 5: Conclude That Line \( EF \) Bisects Angle \( PED \)\*\*

The vertical line \( x = 4 \) (line \( EF \)) divides the angle \( \theta \) at \( E \) into two angles of approximately \( 33.69^\circ \) each, demonstrating that it is indeed the angle bisector:

\[

33.69^\circ + 33.69^\circ \approx 67.38^\circ

\]

\*\*Conclusion:\*\*

For \( p = -2 \), the line through points \( E \) and \( F \) is the angle bisector of angle \( PED \), as required.

\*\*Answer:\*\* Thus, when p = –2, the line through E and F bisects angle PED—it is the angle bisector at E.

QUESTION NUMBER: 16

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

183 8338 8521 7680

TIME TAKEN: 79.9219 seconds

OUTPUT:

To solve this problem, we need to find the exact value of \( p \) such that circle \( c \), centered at \( M(4,2) \) and passing through point \( D \), is tangent to both sides \( OA \) and \( BC \) of the rectangle.

Let's outline the steps:

\*\*1. Find the coordinates of point \( D \):\*\*

- Point \( F \) is at \( (4,0) \) (the midpoint of \( OA \)).

- Line \( PF \) passes through \( P(0,p) \) and \( F(4,0) \). Its equation is:

\[

y = -\frac{p}{4} x + p

\]

- Line \( AC \) passes through \( A(8,0) \) and \( C(0,4) \). Its equation is:

\[

y = -\frac{1}{2} x + 4

\]

- Solving these equations gives the \( x \)-coordinate of \( D \):

\[

x\_D = \frac{16 - 4p}{2 - p}

\]

- The \( y \)-coordinate is:

\[

y\_D = -\frac{1}{2} x\_D + 4

\]

\*\*2. Determine that the circle must have radius 2:\*\*

- Since the circle \( c \) is tangent to both \( OA \) (at \( y=0 \)) and \( BC \) (at \( y=4 \)), and centered at \( (4,2) \), its radius must be \( r = 2 \).

\*\*3. Use the distance from \( M \) to \( D \) to set up an equation:\*\*

- The distance \( MD \) is calculated using:

\[

MD^2 = (x\_D - 4)^2 + (y\_D - 2)^2 = r^2 = 4

\]

- Substitute \( x\_D \) and \( y\_D \) in terms of \( p \) into this equation.

\*\*4. Simplify and solve for \( p \):\*\*

- After substitution and simplification, we get:

\[

\frac{80}{(2 - p)^2} = 4

\]

\[

20 = (2 - p)^2

\]

\[

2 - p = \pm 2\sqrt{5}

\]

- Since \( p \) is on the negative \( y \)-axis (so \( p < 0 \)), we choose the negative solution:

\[

p = 2 - 2\sqrt{5}

\]

\*\*Conclusion:\*\*

The exact value of \( p \) is \( p = 2 - 2\sqrt{5} \).

\*\*Answer:\*\*

\[ p\ =\ 2\ -\ 2\sqrt{5} \]

QUESTION NUMBER: 17

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

54 667 721 384

TIME TAKEN: 7.0743 seconds

OUTPUT:

To find the distance between the two horizontal asymptotes of the function \( f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \), we need to determine the limits of \( f(x) \) as \( x \) approaches infinity and negative infinity.

1. \*\*As \( x \to \infty \):\*\*

\( e^x \to \infty \), so \( e^x + 1 \to \infty \).

Therefore, \( f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \to \frac{1}{\infty} = 0 \).

So, one horizontal asymptote is \( y = 0 \).

2. \*\*As \( x \to -\infty \):\*\*

\( e^x \to e^{-\infty} = 0 \), so \( e^x + 1 \to 0 + 1 = 1 \).

Therefore, \( f(x) = \frac{1}{1} = 1 \).

So, the other horizontal asymptote is \( y = 1 \).

The distance between these two asymptotes is:

\[ \text{Distance} = |1 - 0| = 1 \]

\*\*Answer: 1\*\*

QUESTION NUMBER: 18

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

51 1947 1998 1344

TIME TAKEN: 21.9082 seconds

OUTPUT:

Om te bewijzen dat \( F(x) = x - \ln(e^x + 1) \) een primitieve is van \( f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} \), moeten we aantonen dat de afgeleide van \( F(x) \) gelijk is aan \( f(x) \). Met andere woorden, we moeten laten zien dat \( F'(x) = f(x) \).

\*\*Stap 1: Bereken de afgeleide van \( F(x) \).\*\*

We hebben:

\[ F(x) = x - \ln(e^x + 1) \]

Dus de afgeleide is:

\[ F'(x) = \dfrac{d}{dx} [x] - \dfrac{d}{dx} [\ln(e^x + 1)] \]

Bereken de afgeleide van \( x \):

\[ \dfrac{d}{dx} [x] = 1 \]

Bereken de afgeleide van \( \ln(e^x + 1) \) met behulp van de kettingregel:

\[ \dfrac{d}{dx} [\ln(u)] = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{du}{dx} \]

Waarbij \( u = e^x + 1 \), dus \( \dfrac{du}{dx} = e^x \).

Daarom is:

\[ \dfrac{d}{dx} [\ln(e^x + 1)] = \dfrac{1}{e^x + 1} \cdot e^x = \dfrac{e^x}{e^x + 1} \]

\*\*Stap 2: Bereken \( F'(x) \).\*\*

\[ F'(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x + 1} \]

\*\*Stap 3: Vereenvoudig \( F'(x) \).\*\*

Om \( F'(x) \) verder te vereenvoudigen, brengen we de termen op een gemeenschappelijke noemer:

\[ F'(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x + 1} - \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{(e^x + 1) - e^x}{e^x + 1} \]

Dit vereenvoudigt tot:

\[ F'(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} \]

\*\*Conclusie:\*\*

We hebben aangetoond dat:

\[ F'(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} = f(x) \]

Dus \( F(x) \) is inderdaad een primitieve van \( f(x) \).

QUESTION NUMBER: 19

MODEL NUMBER: 1

TOKEN USAGE:

86 1812 1898 1088

TIME TAKEN: 20.5038 seconds

OUTPUT:

To prove that the area \( A(a) \) enclosed by the graph of \( f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} \), the \( x \)-axis, the \( y \)-axis, and the line \( x = a \) (with \( a > 0 \)) is always less than \( \ln(2) \), we first express this area as a definite integral:

\[

A(a) = \int\_0^a \dfrac{1}{e^x + 1} \, dx

\]

We can compute the integral \( \int\_0^\infty \dfrac{1}{e^x + 1} \, dx \) to find the maximum possible area under the curve from \( x = 0 \) to infinity. If this integral equals \( \ln(2) \), then for any finite \( a > 0 \), the area \( A(a) \) from \( x = 0 \) to \( x = a \) must be less than \( \ln(2) \).

To evaluate \( \int\_0^\infty \dfrac{1}{e^x + 1} \, dx \), we use a substitution:

Let \( t = e^{-x} \), so when \( x = 0 \), \( t = 1 \), and as \( x \to \infty \), \( t \to 0 \). The differential \( dx \) becomes:

\[

dx = -\dfrac{dt}{t}

\]

Substituting into the integral, we get:

\[

\int\_0^\infty \dfrac{1}{e^x + 1} \, dx = \int\_1^0 \dfrac{1}{\dfrac{1}{t} + 1} \left( -\dfrac{dt}{t} \right) = \int\_0^1 \dfrac{dt}{1 + t}

\]

This integral simplifies to:

\[

\int\_0^1 \dfrac{dt}{1 + t} = \left[ \ln(1 + t) \right]\_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)

\]

Therefore:

\[

\int\_0^\infty \dfrac{1}{e^x + 1} \, dx = \ln(2)

\]

Since the area \( A(a) \) from \( x = 0 \) to any finite \( a > 0 \) is less than the total area from \( x = 0 \) to \( x \to \infty \), it follows that:

\[

A(a) = \int\_0^a \dfrac{1}{e^x + 1} \, dx < \ln(2)

\]

\*\*Conclusion:\*\*

Yes; because ∫₀ᵃ [1⁄(eˣ ＋ 1)] dx ＜ ln 2 for all positive a, so the area is always less than ln 2.

QUESTION NUMBER: 1

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

43 745 788 0

TIME TAKEN: 6.9459 seconds

OUTPUT:

Om het minimum van de functie \( f(x) = 2x + \frac{1}{x} \) te vinden voor \( x > 0 \), volgen we de volgende stappen:

1. \*\*Bepaal de afgeleide van de functie\*\*:

\[ f(x) = 2x + \frac{1}{x} \]

De afgeleide \( f'(x) \) is:

\[ f'(x) = \frac{d}{dx} \left( 2x + \frac{1}{x} \right) = 2 - \frac{1}{x^2} \]

2. \*\*Stel \( f'(x) = 0 \) om de kritieke punten te vinden\*\*:

\[ 2 - \frac{1}{x^2} = 0 \]

Dit leidt tot:

\[ 2 = \frac{1}{x^2} \]

\[ x^2 = \frac{1}{2} \]

\[ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \]

\[ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \]

Omdat \( x > 0 \), nemen we:

\[ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \]

3. \*\*Controleer of dit punt een minimum is door de tweede afgeleide te bekijken\*\*:

Bereken de tweede afgeleide \( f''(x) \):

\[ f''(x) = \frac{d}{dx} \left( 2 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( 2 \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2} \right) = 0 + \frac{2}{x^3} \]

\[ f''(x) = \frac{2}{x^3} \]

Evalueer \( f''(x) \) bij \( x = \frac{\sqrt{2}}{2} \):

\[ f''\left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2}{\left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{8}} = \frac{2 \cdot 8}{2\sqrt{2}} = \frac{16}{2\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \]

Omdat \( f''\left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) > 0 \), is er een lokaal minimum bij \( x = \frac{\sqrt{2}}{2} \).

4. \*\*Bereken de functiewaarde bij dit punt\*\*:

\[ f \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \]

Dus, het minimum van de functie is exact:

\[ \boxed{2\sqrt{2}} \]

QUESTION NUMBER: 2

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

102 702 804 0

TIME TAKEN: 7.4446 seconds

OUTPUT:

We beginnen met het bepalen van de scheve asymptoot van de functie \( f(x) = 2x + \frac{1}{x} \).

Voor grote waarden van \( x \) wordt de term \( \frac{1}{x} \) steeds kleiner. We vermoeden dat de scheve asymptoot de vorm \( y = 2x + c \) heeft waar \( c \) een constante is.

Om de constante \( c \) te vinden, kijken we naar het gedrag van \( f(x) - (2x + c) \) bij grote \( x \):

\[

f(x) - (2x + c) = 2x + \frac{1}{x} - 2x - c = \frac{1}{x} - c

\]

Als \( x \) naar oneindig gaat, moet \( \frac{1}{x} \) naar nul gaan:

\[

\lim\_{x \to \infty} \left( \frac{1}{x} - c \right) = 0 \implies c = 0

\]

Dus de scheve asymptoot k is \( y = 2x \).

Nu analyseren we het vlakdeel \( V \) dat wordt ingesloten door de grafiek van \( f \), de lijn \( k \) en de lijnen \( x = a \) en \( x = 2a \). De vergelijkingen van deze lijnen zijn:

1. \( y = f(x) = 2x + \frac{1}{x} \)

2. \( y = k = 2x \)

3. \( x = a \)

4. \( x = 2a \)

De oppervlakte van \( V \) wordt gegeven door het verschil van de integralen van \( f(x) \) en \( 2x \) tussen \( x = a \) en \( x = 2a \):

\[

\text{Oppervlakte} = \int\_a^{2a} \left( f(x) - 2x \right) \, dx = \int\_a^{2a} \left( (2x + \frac{1}{x}) - 2x \right) \, dx = \int\_a^{2a} \frac{1}{x} \, dx

\]

Het verschil simplificeert naar:

\[

\int\_a^{2a} \frac{1}{x} \, dx

\]

De integraal van \( \frac{1}{x} \) is:

\[

\int\_a^{2a} \frac{1}{x} \, dx = \left. \ln |x| \right|\_a^{2a} = \ln(2a) - \ln(a) = \ln \left( \frac{2a}{a} \right) = \ln(2)

\]

De natuurlijke logaritme van 2 is een constante.

Conclusie:

\[

\text{Oppervlakte} = \ln(2)

\]

De oppervlakte van het vlakdeel \( V \) is dus \( \ln(2) \), en deze oppervlakte is onafhankelijk van de waarde van \( a \).

Hiermee is bewezen dat de oppervlakte van het vlakdeel \( V \) onafhankelijk is van \( a \).

QUESTION NUMBER: 3

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

96 1066 1162 0

TIME TAKEN: 12.1666 seconds

OUTPUT:

Het doel is om de inhoud te berekenen van het omwentelingslichaam dat ontstaat wanneer het vlakdeel ingesloten door de functie \( f(x) = 2x + \frac{1}{x} \) (voor \( x > 0 \)) en de lijn \( y = 3 \) wordt gewenteld om de lijn \( y = 3 \).

Eerst bepalen we waar de functie \( f(x) \) de lijn \( y = 3 \) snijdt. Hiervoor lossen we de vergelijking \( 2x + \frac{1}{x} = 3 \) op.

\[

2x + \frac{1}{x} = 3

\]

Vermenigvuldig beide zijden van de vergelijking met \( x \) om van de breuk af te komen:

\[

2x^2 + 1 = 3x

\]

Herschik deze vergelijking tot een standaardvorm van een kwadratische vergelijking:

\[

2x^2 - 3x + 1 = 0

\]

We lossen deze kwadratische vergelijking op met de abc-formule \( x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \):

Hierbij zijn \( a = 2 \), \( b = -3 \) en \( c = 1 \).

\[

x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}

\]

Dus de oplossingen zijn:

\[

x = \frac{3 + 1}{4} = 1 \quad \text{en} \quad x = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2}

\]

We krijgen dus twee snijpunten: \( x = \frac{1}{2} \) en \( x = 1 \).

De inhoud van het omwentelingslichaam kan worden berekend door het combineren van cilinderschillen in het vlakdeel met grenzen \(x = \frac{1}{2}\) en \(x = 1\).

Het verschil van de functie en de lijn \( y = 3 \) geeft de hoogte van elke cylinderschil:

\[

f(x) - 3 = 2x + \frac{1}{x} - 3

\]

Bij gewenteling rondom de lijn \( y = 3 \), is de radius van elke cilinderschil het verschil tussen \( 3 \) en \( f(x) \). Dat is \( |3 - f(x)| \), welke zelf positief is dus \( f(x) - 3 \).

Om de inhoud te vinden, gebruiken we de integraal van 0 tot \(2\pi\) voor elk \(2\pi r h\)-element in \(dx\)-vorme, valt dat tot:

\[

2\pi \int\_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2x + \frac{1}{x} - 3\right)dx

\]

Het vereenvoudigd wordt:

\[

2\pi \left( \int\_{\frac{1}{2}}^{1} 2x \, dx + \int\_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x} \, dx - \int\_{\frac{1}{2}}^{1} 3 \, dx \right)

\]

Deze drie afzonderlijke integralen worden opgelost als:

\[

Laten \, A =\int\_{\frac{1}{2}}^{1} 2x \, dx \\

A=[x^2]\_{\frac{1}{2}}^{1}=[1]-[(0.5)^2]=1-0.25 = 0.75

B= \int\_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x} dx = [ln|x|]\_{\frac{1}{2}}^{1}=ln(1)-ln(0.5) = -(-ln(2)) = ln(2)

C= \int\_{\frac{1}{2}}^{1} 3dx = 3 [x]\_{\frac{1}{2}}=[3(1)-3\*(1/2)]=3(1 - 1/2)=1.5

Bij elkaar dectiving

\]

V= 2\pi [0.75 + ln(2)-1.5]

V = 2\pi [0.75 + ln 2-1.5]= 2 pi{ 0.693- 0.75}

Eindigt de volgt met

V\approx 2 \pi [0.317]resultant = ~2 \pi (0.317)

=~1.99

Inhoud van omventelingslichaam ne 1.99

QUESTION NUMBER: 4

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

361 881 1242 0

TIME TAKEN: 10.8323 seconds

OUTPUT:

Allereerst moeten we de afmetingen en eigenschappen van de plaat vóór en na het buigen beter begrijpen. Laten we beginnen met vlakdeel ABCD. De dikte van de plaat is \( d \) mm en als de plaat wordt gebogen over een hoek van 45°:

1. De straal van de cirkel met boog \( C'D' \) is \( 2d \).

2. De straal van de cirkel met boog \( A'B' \) is \( 3d \).

Ter verduidelijking, de neutrale lijn \( P'Q' \) bevindt zich op een afstand van \( 2.4d \) vanaf het middelpunt \( M \) (0.4d vanaf \( C'D' \)).

We moeten nu de lengte van de boog van de neutrale lijn \( P'Q' \) berekenen in beide situaties, wat gelijk is aangezien de lengte van de neutrale lijn gelijk blijft tijdens het buigen.

### Berekening van de lengte van de neutrale lijn:

De originele lengte van de neutrale lijn PQ is recht en heeft een lengte van \(PQ = d \text{ mm} \). Na het buigen is boog \( P'Q' \) een deel van een cirkel met straal \( 2.4d \) en een hoek van 45°.

De booglengte van \( P'Q' \) in radianen uitgedrukt:

\[

l = 2.4d \cdot \frac{\pi}{4} = 2.4d \cdot 0.7854 = 1.884d

\]

Aangezien de lengte behouden blijft:

\[

PQ = 1.884d

\]

### Berekening van de oppervlakte van vlakdeel \( A'B'C'D' \):

De oppervlakte van het vlakdeel \( A'B'C'D' \) wordt benaderd door het verschil tussen de sectoren van de twee cirkels minus de sector van de afstand:

- Oppervlakte van cirkelsector met straal \( 3d \):

\[

\text{Oppervlakte} = \frac{1}{2} \cdot (3d)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{9d^2\pi}{8}

\]

- Oppervlakte van cirkelsector met straal \( 2d \):

\[

\text{Oppervlakte} = \frac{1}{2} \cdot (2d)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{4d^2\pi}{8}=\frac{d^2\pi}{2}

\]

Dus de oppervlakte van \( A'B'C'D' \) is het verschil:

\[

\text{Oppervlakte} A'B'C'D' = \frac{9d^2\pi}{8} - \frac{4d^2\pi}{8} = \frac{5d^2\pi}{8}

\]

### Berekening van de oppervlakte van ABCD:

De originele oppervlakte van vlakdeel ABCD is gewoon de rechthoek:

\[

d \times PQ = d \times d = d^2

\]

### Vergroting van de oppervlakte:

De vergroting is dan:

\[

\frac{5d^2\pi}{8} - d^2

\]

Om hoeveel procent groter de oppervlakte wordt:

\[

\frac{\left(\frac{\pi}{8} - 1\right)d^2}{d^2}\times100 = \left(\frac{5\pi}{8} - 1\right) \times 100 = \left( \frac{15.71-8}{8}\right)\times100=104.13

\]

We ronden dit af naar de dichtstbijzijnde gehele getal:

\[

104 \%

\]

Het eindantwoord is daarom de oppervlakte van vlakdeel \( A'B'C'D' \) is \*\*\(\boxed{96}\)\*\* % groter dan de oppervlakte van vlakdeel ABCD.

Hoewel 96%.

\*\*Answer:\*\* 16

QUESTION NUMBER: 5

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

313 561 874 0

TIME TAKEN: 6.9716 seconds

OUTPUT:

We beginnen met de gegeven relatie voor de benodigde kracht \( F \):

\[

F = \left( \frac{R \cdot d^2}{V} \right) \left( 1 + \frac{4d}{V} \right)

\]

Er zijn de volgende gegevens:

- Dikte van het metaal \( d = 10 \) mm

- Breedte van de opening van de matrijs \( V = 200 \) mm

- Benodigde kracht \( F = 420 \) kN/m

We substitueren deze waarden in de formule:

\[

420 = \left( \frac{R \cdot 10^2}{200} \right) \left( 1 + \frac{4 \cdot 10}{200} \right)

\]

Reken de termen binnen de haakjes uit:

\[

420 = \left( \frac{R \cdot 100}{200} \right) \left( 1 + \frac{40}{200} \right)

\]

\[

420 = \left( \frac{R \cdot 100}{200} \right) \left( 1 + 0.2 \right)

\]

\[

420 = \left( \frac{R \cdot 100}{200} \right) \cdot 1.2

\]

\[

420 = 0.6R

\]

Los \( R \) op:

\[

R = \frac{420}{0.6} = 700

\]

Nu willen we weten welke kracht \( F \) nodig is als \( V = 100 \) mm. Gebruik dezelfde formule met \( R = 700 \):

\[

F = \left( \frac{700 \cdot 10^2}{100} \right) \left( 1 + \frac{4 \cdot 10}{100} \right)

\]

Reken de termen binnen de haakjes uit:

\[

F = \left( \frac{700 \cdot 100}{100} \right) \left( 1 + \frac{40}{100} \right)

\]

\[

F = \left( 700 \right) \left( 1 + 0.4 \right)

\]

\[

F = 700 \cdot 1.4

\]

\[

F = 980

\]

Dus, de kracht die nodig is om de metalen plaat met een dikte van 10 mm te buigen op een matrijs met een breedte van 100 mm is \( \boxed{980} \) kN/m.

QUESTION NUMBER: 6

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

300 782 1082 0

TIME TAKEN: 8.7416 seconds

OUTPUT:

We beginnen met de gegeven formules en willen de formule voor \( F \) herschrijven in termen van \( R \) en \( d \).

Formule 1:

\[

F = \left( \frac{R \cdot d^2}{V} \right) \left( 1 + \frac{4d}{V} \right)

\]

Formule 2:

\[

V = d^{1,75}

\]

We substitueren \( V \) uit formule 2 in formule 1:

\[

F = \left( \frac{R \cdot d^2}{d^{1,75}} \right) \left( 1 + \frac{4d}{d^{1,75}} \right)

\]

Vereenvoudigen we de breuken:

\[

F = \left( \frac{R \cdot d^2}{d^{1,75}} \right) \left( 1 + \frac{4d}{d^{1,75}} \right)

= \left( R \cdot d^{2 - 1,75} \right) \left( 1 + 4d^{1 - 1,75} \right)

= \left( R \cdot d^{0,25} \right) \left( 1 + 4d^{-0,75} \right)

\]

Nu herschrijven we:

\[

F = R \cdot d^{0,25} \left( 1 + 4d^{-0,75} \right)

= R \left( d^{0,25} + 4d^{0,25 - 0,75} \right)

= R \left( d^{0,25} + 4d^{-0,5} \right)

\]

We stellen \( f(d) = d^{0,25} + 4d^{-0,5} \) en we zoeken het minimum van deze functie.

We vinden de afgeleide \( f'(d) \) en stellen die gelijk aan nul om kritieke punten te vinden:

\[

f'(d) = 0,25d^{-0,75} - 2d^{-1,5}

\]

We stellen de afgeleide gelijk aan nul om \( d \) te vinden:

\[

0,25d^{-0,75} = 2d^{-1,5}

\]

Delen beide zijden door \( d^{-1,5} \):

\[

0,25d^{1,5 - 0,75} = 2

\]

\[

0,25d^{0,75} = 2

\]

Vermenigvuldigen beide zijden met 4:

\[

d^{0,75} = 8

\]

Dan:

\[

d = 8^{\frac{1}{0,75}}

= 8^{\frac{4}{3}}

= 2^3^{\frac{4}{3}}

= 2^4

= 16

\]

Om de tweede afgeleide te controleren dat het minimaal is:

\[

f''(d) = -0,1875d^{-1,75} + 3d^{-2,5}

\]

Bij \( d = 16 \):

\[

f''(16) = -0,1875 \cdot 16^{-1,75} + 3 \cdot 16^{-2,5}

\]

Bevestigen dat de tweede afgeleide positief is dat de kritieke punt is een minimum.

Conclusie:

De waarde van \( d \) waarbij de benodigde kracht \( F \) minimaal is, is \( \boxed{16} \).

QUESTION NUMBER: 7

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

137 686 823 0

TIME TAKEN: 6.1594 seconds

OUTPUT:

Om te bewijzen dat de bewegingsvergelijkingen van Q inderdaad \( x\_Q(t) = t + t^2 \) en \( y\_Q(t) = t^2 - t \) zijn, moeten we de gegeven informatie gebruiken en stap voor stap de posities van de punten berekenen. Volg de volgende stappen:

1. \*\*Positie van punt P:\*\*

De positie van punt \( P \) wordt gegeven door:

\[

x\_P(t) = 2t \quad \text{en} \quad y\_P(t) = 2t^2.

\]

2. \*\*Positie van punt O:\*\*

O is de oorsprong, dus:

\[

x\_O = 0 \quad \text{en} \quad y\_O = 0.

\]

3. \*\*Positie van het middenpunt M van lijnstuk OP:\*\*

Omdat M het midden is van het lijnstuk OP, zijn de coördinaten van M het gemiddelde van de coördinaten van O en P:

\[

x\_M(t) = \frac{x\_O + x\_P(t)}{2} = \frac{0 + 2t}{2} = t,

\]

\[

y\_M(t) = \frac{y\_O + y\_P(t)}{2} = \frac{0 + 2t^2}{2} = t^2.

\]

4. \*\*Vector \(MP\):\*\*

Vector \( MP \) loopt van M naar P:

\[

\overrightarrow{MP} = (x\_P(t) - x\_M(t), y\_P(t) - y\_M(t)) = (2t - t, 2t^2 - t^2) = (t, t^2).

\]

5. \*\*Roteren van vector \( MP \) om M over 90 graden rechtsom:\*\*

Een rotatie van 90 graden rechtsom (oftewel -90 graden) betekent dat de vector \( (a, b) \) transformeert naar \( (b, -a) \):

\[

\overrightarrow{MP\_\text{geroteerd}} = (t^2, -t).

\]

6. \*\*Positie van Q na rotatie:\*\*

Punt \( Q \) wordt verkregen door de geroteerde vector \( \overrightarrow{MP\_\text{geroteerd}} \) op te tellen bij het punt M:

\[

x\_Q(t) = x\_M(t) + t^2 = t + t^2,

\]

\[

y\_Q(t) = y\_M(t) + (-t) = t^2 - t.

\]

Dit zijn precies de gegeven bewegingsvergelijkingen voor \( x\_Q(t) \) en \( y\_Q(t) \). Dus hebben we bewezen dat \( x\_Q(t) = t + t^2 \) en \( y\_Q(t) = t^2 - t \) inderdaad de bewegingsvergelijkingen van Q zijn.

\[

\boxed{\left( x\_Q(t) = t + t^2 \quad \text{en} \quad y\_Q(t) = t^2 - t \right)}

\]

QUESTION NUMBER: 8

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

171 1181 1352 0

TIME TAKEN: 9.8826 seconds

OUTPUT:

Laten we eerst de bewegingsvergelijkingen van \( P \) samenvatten:

\[

x\_P(t) = 2t, \quad y\_P(t) = 2t^2.

\]

De baan van punt \( P \) is dus:

\[

P = (2t, 2t^2).

\]

Punt \( M \) is het midden van lijnstuk \( OP \). Laten we de coördinaten van \( O \) (het beginpunt) als \( O = (0, 0) \) nemen. De coördinaten van \( M \) worden dan:

\[

M = \left( \frac{0 + 2t}{2}, \frac{0 + 2t^2}{2} \right) = (t, t^2).

\]

Vector \( MP \) is het verschil tussen \( P \) en \( M \):

\[

MP = P - M = (2t - t, 2t^2 - t^2) = (t, t^2).

\]

We roteren vector \( MP \) rechtsom (90 graden met de klok mee) om \( M \). Een rechtsom geroteerde vector \( (a, b) \) over 90 graden wordt \( (b, -a) \). Daarom wordt vector \( MP \) rechtsom over 90 graden geroteerd:

\[

MP\_{\text{geroteerd}} = (t^2, -t).

\]

Dit betekent dat \( Q \) de vector \( MP\_{\text{geroteerd}} \) heeft t.o.v. \( M \). Dus de coördinaten van \( Q \) zijn:

\[

Q = M + MP\_{\text{geroteerd}} = (t, t^2) + (t^2, -t) = (t + t^2, t^2 - t).

\]

Dit bevestigt de gegeven bewegingsvergelijkingen van \( Q \):

\[

x\_Q(t) = t + t^2, \quad y\_Q(t) = t^2 - t.

\]

Nu berekenen we de snelheid van \( P \):

\[

\vec{v}\_P(t) = \left( \frac{dx\_P}{dt}, \frac{dy\_P}{dt} \right) = \left( \frac{d}{dt}(2t), \frac{d}{dt}(2t^2) \right) = (2, 4t).

\]

De snelheid van \( P \) is de grootte van \( \vec{v}\_P(t) \):

\[

|\vec{v}\_P(t)| = \sqrt{2^2 + (4t)^2} = \sqrt{4 + 16t^2}.

\]

Nu berekenen we de snelheid van \( Q \):

\[

\vec{v}\_Q(t) = \left( \frac{dx\_Q}{dt}, \frac{dy\_Q}{dt} \right) = \left( \frac{d}{dt}(t + t^2), \frac{d}{dt}(t^2 - t) \right) = (1 + 2t, 2t - 1).

\]

De snelheid van \( Q \) is de grootte van \( \vec{v}\_Q(t) \):

\[

|\vec{v}\_Q(t)| = \sqrt{(1 + 2t)^2 + (2t - 1)^2}.

\]

We berekenen de kwadraten:

\[

(1 + 2t)^2 = 1 + 4t + 4t^2, \quad (2t - 1)^2 = 4t^2 - 4t + 1.

\]

Samenvoegen:

\[

|\vec{v}\_Q(t)| = \sqrt{(1 + 4t + 4t^2) + (4t^2 - 4t + 1)} = \sqrt{1 + 4t + 4t^2 + 4t^2 - 4t + 1} = \sqrt{8t^2 + 2} = \sqrt{2(4t^2 + 1)} = \sqrt{2} \sqrt{4t^2 + 1}.

\]

Verhouding van snelheden \( c \):

\[

c = \frac{|\vec{v}\_P(t)|}{|\vec{v}\_Q(t)|} = \frac{\sqrt{4 + 16t^2}}{\sqrt{2} \sqrt{4t^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2(2 + 8t^2)}}{\sqrt{2} \sqrt{4t^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2 + 8t^2}}{\sqrt{2} \sqrt{4t^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2 + 8t^2}}{\sqrt{4t^2 + 1}}.

\]

Omdat:

\[

\sqrt{2 + 8t^2} = \sqrt{2(4t^2 + 1)}, \textrm{ hebben we } \frac{\sqrt{2(4t^2 + 1)}}{\sqrt{4t^2 + 1}} = \sqrt{2}.

\]

Conclusie:

\[

c = \sqrt{2}.

\]

Exact de waarde van \( c \) is \( \boxed{\sqrt{2}} \).

QUESTION NUMBER: 9

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

181 934 1115 0

TIME TAKEN: 8.2457 seconds

OUTPUT:

Om te bewijzen dat de lengte \( L \) van lijnstuk \( PQ \) wordt gegeven door \( L = |t| \sqrt{2 t^2 + 2} \), gegeven de bewegingsvergelijkingen \( x\_P(t) = 2t \), \( y\_P(t) = 2t^2 \), \( x\_Q(t) = t + t^2 \), en \( y\_Q(t) = t^2 - t \), volgen we de volgende stappen:

\*\*Stap 1: Bereken de coördinaten van punt M.\*\*

Punt M is het midden van lijnstuk OP, waarbij O de oorsprong is. Punt P heeft de coördinaten \((2t, 2t^2)\). Het midden M heeft dan de coördinaten:

\[ M = \left(\frac{0 + 2t}{2}, \frac{0 + 2t^2}{2}\right) = (t, t^2). \]

\*\*Stap 2: Bereken vector MP.\*\*

Vector \(\vec{MP}\) van M naar P is:

\[ \vec{MP} = (x\_P - x\_M, y\_P - y\_M) = (2t - t, 2t^2 - t^2) = (t, t^2). \]

\*\*Stap 3: Roteer \(\vec{MP}\) 90 graden rechtsom.\*\*

Een rotatie met 90 graden rechtsom komt overeen met de transformatie:

\[ (x, y) \mapsto (y, -x). \]

Dus de geroteerde vector \(\vec{MQ}\) wordt:

\[ \vec{MQ} = (t^2, -t). \]

\*\*Stap 4: Bereken de coördinaten van punt Q op basis van de geroteerde vector \(\vec{MQ}\).\*\*

Omdat \( \vec{MQ} \) van M naar Q wordt toegepast, en M heeft de coördinaten \( (t, t^2) \), krijgen we:

\[ Q = M + \vec{MQ} = (t, t^2) + (t^2, -t) = (t + t^2, t^2 - t). \]

Dit zijn precies de coördinaten die gegeven zijn voor Q:

\[ x\_Q = t + t^2, \]

\[ y\_Q = t^2 - t. \]

\*\*Stap 5: Bereken de afstand \( L = PQ \).\*\*

Gebruik de afstandsformule om de afstand tussen coördinaten van P \((2t, 2t^2)\) en Q \((t + t^2, t^2 - t)\) te berekenen:

\[ L = \sqrt{(x\_P - x\_Q)^2 + (y\_P - y\_Q)^2}. \]

Bereken het verschil in de x-coördinaten:

\[ x\_P - x\_Q = 2t - (t + t^2) = t - t^2. \]

Bereken het verschil in de y-coördinaten:

\[ y\_P - y\_Q = 2t^2 - (t^2 - t) = 2t^2 - t^2 + t = t^2 + t. \]

Bereken \( L \) door substitutie:

\[ L = \sqrt{(t - t^2)^2 + (t^2 + t)^2}. \]

Expandeer de termen:

\[ (t - t^2)^2 = t^2 - 2t^3 + t^4, \]

\[ (t^2 + t)^2 = t^4 + 2t^3 + t^2. \]

Tel de termen bij elkaar op:

\[ L^2 = t^2 - 2t^3 + t^4 + t^4 + 2t^3 + t^2 = 2t^4 + 2t^2. \]

Dus:

\[ L = \sqrt{2t^4 + 2t^2} = \sqrt{2t^2(t^2 + 1)} = |t| \sqrt{2(t^2 + 1)} = |t| \sqrt{2t^2 + 2}. \]

Hiermee hebben we bewezen dat:

\[ L = |t| \sqrt{2t^2 + 2}. \]

QUESTION NUMBER: 10

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

281 837 1118 0

TIME TAKEN: 7.9013 seconds

OUTPUT:

We beginnen met de functie voor de lengte \( L \) van het lijnstuk PQ:

\[

L = |t| \sqrt{2t^2 + 2}

\]

De absolute waarde geeft aan dat we \( t \) moeten beschouwen in twee gevallen: \( t \geq 0 \) en \( t < 0 \). Omdat we geïnteresseerd zijn in de limiet als \( t \) vanaf links (dus \( t \to 0^- \)), kunnen we \( t \) vervangen door \(-t\) (waarbij \( t \) nu positief wordt).

We beschouwen eerst de negatieve waarden van \( t \). Omdat \( t \to 0^- \) en \(|t| = -t\), wordt \( L \) gelijk aan:

\[

L = -t \sqrt{2t^2 + 2}

\]

koest goed? Ga door met de berekening van de afgeleide \( \frac{dL}{dt} \).

Nu zullen we de afgeleide berekenen:

\[

L = -t \sqrt{2t^2 + 2}

\]

Daarbij gebruiken we de productregel en de kettingregel. Stel \( u = -t \) en \( v = \sqrt{2t^2 + 2}\):

\[

L = u \cdot v

\]

Hierbij:

\[

u = -t, \quad \frac{du}{dt} = -1

\]

\[

v = \sqrt{2t^2 + 2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( (2t^2 + 2)^{1/2} \right) = \frac{1}{2} (2t^2 + 2)^{-1/2} \cdot 4t = \frac{2t}{\sqrt{2t^2 + 2}}

\]

Gebruik nu de productregel:

\[

\frac{dL}{dt} = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt}

\]

\[

\frac{dL}{dt} = (-t) \cdot \frac{2t}{\sqrt{2t^2 + 2}} + \sqrt{2t^2 + 2} \cdot (-1)

\]

\[

\frac{dL}{dt} = -\frac{2t^2}{\sqrt{2t^2 + 2}} - \sqrt{2t^2 + 2}

\]

Nu nemen we de limiet van \(\frac{dL}{dt}\) als \( t \to 0^- \):

\[

\lim\_{t \to 0^-} \left( -\frac{2t^2}{\sqrt{2t^2 + 2}} - \sqrt{2t^2 + 2} \right)

\]

Als \( t \to 0 \), wordt \( 2t^2 \to 0 \). Dit vereenvoudigt het binnen de limiet:

\[

\lim\_{t \to 0^-} \left( -\frac{2t^2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right)

\]

\[

\lim\_{t \to 0^-} \left( -\frac{2t^2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right)

\]

Omdat \( \frac{2t^2}{\sqrt{2t^2 + 2}} \to 0 \):

\[

\lim\_{t \to 0^-} \left( -\sqrt{2} \right) = -\sqrt{2}

\]

Dus, de helling van de grafiek van \( L \) nadert exact \(\boxed{-\sqrt{2}}\) als \( t \) vanaf links tot 0 nadert.

QUESTION NUMBER: 11

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

99 1062 1161 0

TIME TAKEN: 10.3418 seconds

OUTPUT:

We beginnen met de functie \( f(x) = |\sin(x) + \frac{1}{2} \sqrt{3}| \). Om de maxima te vinden, beschouwen we de uitdrukking binnen de absolute waarde, namelijk \( \sin(x) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \).

De maxima van \( \sin(x) \) zijn 1, en de minima zijn -1. We kijken naar de waarden van \( x \) die ervoor zorgen dat de uitdrukking \( \sin(x) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \) een maximum bereikt.

De eerste top ontstaat wanneer \(\sin(x)\) zijn maximum van 1 bereikt:

\[

\sin(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{(waar \( k \) een geheel getal is)}

\]

Bij \( x = \frac{\pi}{2} \):

\[

\sin\left( \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{3} = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{3}

\]

Dus, \( f(x) \) heeft hier een waarde van \( 1 + \frac{1}{2} \sqrt{3} \).

De volgende top ontstaat één periode verderop:

\[

x = \frac{5\pi}{2}

\]

Bij \( x = \frac{5\pi}{2} \):

\[

\sin\left( \frac{5\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{3} = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{3}

\]

Dus, \( f(x) \) heeft ook hier een waarde van \( 1 + \frac{1}{2} \sqrt{3} \).

Samenvattend zijn de punten \( A \) en \( B \):

\[

A\left( \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \quad \text{en} \quad B\left( \frac{5\pi}{2}, 1 + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right)

\]

Nu zoeken we de sinusfunctie \( g(x) = a + b \sin(x) \) die toppen heeft op dezelfde \( y \)-waarden bij dezelfde \( x \)-waarden. Voor een gewone sinusfunctie zijn opeenvolgende toppen altijd gescheiden door een periode van \( 2\pi \). Hier zijn twee opeenvolgende toppen gescheiden door een afstand van \( 2\pi \), dus \( g(x) \) moet dezelfde periode hebben.

Bij de toppen geldt:

\[

a + b \cdot 1 = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{3}

\]

Dit geeft:

\[

a + b = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{3}

\]

Nu beschouwen we de laagste waarden tussen deze toppen, die gelijk zijn aan \( a - b \) voor de sinusoïde. We controleren op het middenpunt \(\frac{3\pi}{2} \):

\[

\sin\left( \frac{3\pi}{2} \right) = -1

\]

Dus \( g\left( \frac{3\pi}{2} \right) = a - b \).

Omdat \( f(x) \) de absolute waarde van de sinusfunctie verschuift:

\[

a - b = \left| -1 + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right| = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}

\]

Dit geeft:

\[

a - b = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}

\]

Nu lossen we \( a + b \) en \( a - b \) simultaan op:

\[

a + b = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{3}

\]

\[

a - b = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}

\]

Door optelling en eliminatie verkrijgen we:

\[

2a = (1 + \frac{1}{2} \sqrt{3}) + (1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}) = 2 \Rightarrow a = 1

\]

\[

2b = (1 + \frac{1}{2} \sqrt{3}) - (1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}) = \sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}

\]

De waarden van \( a \) en \( b \) zijn dus exact:

\[

a = 1 \quad \text{en} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}

\]

QUESTION NUMBER: 12

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

68 1168 1236 0

TIME TAKEN: 13.1414 seconds

OUTPUT:

Om de oppervlakte van een enkel klein vlakdeel te berekenen voor de functie \( f(x) = \left| \sin(x) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right| \), moeten we eerst begrijpen hoe de grafiek van \( f(x) \) eruit ziet en waar de snijpunten met de \( x \)-as zich bevinden, aangezien dit de grenzen van de vlakdelen bepalen.

De functie \( f(x) = \left| \sin(x) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right| \) is gebaseerd op de absolute waarde van de sinusfunctie verschoven met \( \frac{1}{2} \sqrt{3} \).

### Stap 1: Vind de snijpunten met de x-as

De grafiek van \( f(x) \) snijdt de \( x \)-as als:

\[ \sin(x) + \frac{1}{2} \sqrt{3} = 0 \]

opgelost geeft dit:

\[ \sin(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \]

De sinuswaarde \(-\frac{1}{2} \sqrt{3} \) komt overeen met de hoeken:

\[ x = \arcsin\left(-\frac{1}{2} \sqrt{3}\right) \]

De waarde \( -\frac{1}{2} \sqrt{3} \) komt overeen met:

\[ x = -\frac{\pi}{3} \quad (\text{en periodiek op elke } 2\pi k) \]

### Stap 2: Bereken de oppervlakte onder één boog van de grafiek van f(x)

We willen nu de oppervlakte van één klein vlakdeel tussen deze snijpunten berekenen. Gegeven de periodiciteit van de sinusfunctie en de aanwezigheid van de absolute waarde, hebben we een integraal nodig in een interval waar de sinusfunctie een volledige cyclus voltooit.

Kleine vlakdelen bevinden zich tussen de punten waar \(\sin(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{3}\), bijvoorbeeld tussen \(-\frac{\pi}{3}\) en \(\frac{\pi}{3}\).

### Stap 3: Integreer f(x) in het juiste interval

De absolute waarde verdwijnt bij integratie als we weten welk deel van de sinuspositie-eenheidscirkel het betreft:

De oppervlakte \( A \) van een enkel klein vlakdeel wordt:

\[ A = \int\_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left| \sin(x) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right| \, dx \]

Omdat \( \sin(x) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \) binnen dit interval altijd positief is (controleer via de trigonometrische identiteit van sinus), kunnen we absolute waarde weglaten:

\[ A = \int\_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \sin(x) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \, dx \]

Dit splitsen we in twee integralen:

\[ A = \int\_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) \, dx + \int\_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \sqrt{3} \, dx \]

### Stap 4: Bereken de integralen afzonderlijk

Voor \(\int\_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) \, dx \):

\[

\int\_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x) \, dx = -\cos(x) \Big|\_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)

\]

Omdat \(\cos(-a) = \cos(a)\):

\[

\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}

\]

Dus:

\[

-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 0

\]

Voor de constante:

\[

\int\_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \sqrt{3} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(x\Big|\_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3}

\]

De oppervlakte van een enkel klein vlakdeel is dus:

\[

A = 0 + \frac{\pi \sqrt{3}}{3} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3}

\]

QUESTION NUMBER: 13

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

69 1078 1147 0

TIME TAKEN: 10.2934 seconds

OUTPUT:

Om aan te tonen dat de raaklijnen aan de grafieken van \( f(x) = \ln(x) \) en \( g(x) = 1 + e^2(1 - \ln(x)) \) elkaar loodrecht snijden in hun snijpunt, moeten we bewijzen dat de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen in dat snijpunt elkaars negatieve inverse zijn.

1. \*\*Bepaal het snijpunt van \( f \) en \( g \):\*\*

We moeten eerst het snijpunt van de functies \( f \) en \( g \) bepalen door \( f(x) \) gelijk te stellen aan \( g(x) \):

\[

\ln(x) = 1 + e^2(1 - \ln(x))

\]

Laten we dit stap voor stap oplossen. Vermenigvuldig eerst beide zijden met \(\ln(x)\):

\[

(\ln(x))^2 = \ln(x) + e^2(1 - \ln(x))

\]

Breng alle termen naar één kant van de vergelijking:

\[

(\ln(x))^2 - (1 + e^2)\ln(x) + e^2 = 0

\]

Dit is een kwadratische vergelijking in \(\ln(x)\). Noem \(\ln(x) = t\). Dan wordt de vergelijking:

\[

t^2 - (1 + e^2)t + e^2 = 0

\]

Los deze kwadratische vergelijking op met de abc-formule:

\[

t = \frac{(1 + e^2) \pm \sqrt{(1 + e^2)^2 - 4e^2}}{2}

\]

Bereken de discriminant:

\[

(1 + e^2)^2 - 4e^2 = 1 + 2e^2 + e^4 - 4e^2 = 1 - 2e^2 + e^4 = (1 - e^2)^2

\]

De discriminant is dus een positief getal, namelijk:

\[

t = \frac{(1 + e^2) \pm (1 - e^2)}{2}

\]

Dit levert twee oplossingen voor \( t \):

\[

t = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{of} \quad t = \frac{2e^2}{2} = e^2

\]

Omdat \(t = \ln(x)\), geven de oplossingen:

\[

\ln(x) = 1 \implies x = e \quad \text{en} \quad \ln(x) = e^2 \implies x = e^{e^2}

\]

In beide gevallen kunnen we nu de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen controleren.

2. \*\*Bepaal de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen:\*\*

De afgeleiden van \( f(x) \) en \( g(x) \) zijn nodig om de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen te bepalen.

\[

f'(x) = \frac{1}{x}

\]

\[

g(x) = 1 + e^2(1 - \ln(x)) \]

\[

g'(x) = -e^2 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{e^2}{x}

\]

Bekijk eerst het geval \( x = e \):

\[

f'(e) = \frac{1}{e}

\]

\[

g'(e) = -\frac{e^2}{e} = -e

\]

Merk op dat \( f'(e) \cdot g'(e) = \frac{1}{e} \cdot -e = -1 \), wat bewijst dat de richtingscoëfficiënten elkaars negatieve inverse zijn, en dus snijden de raaklijnen loodrecht.

Bekijk het geval \( x = e^{e^2} \):

\[

f'(e^{e^2}) = \frac{1}{e^{e^2}}

\]

\[

g'(e^{e^2}) = -\frac{e^2}{e^{e^2}}

\]

Merk op dat ook hier \( f'(e^{e^2}) \cdot g'(e^{e^2}) = \frac{1}{e^{e^2}} \cdot -\frac{e^2}{e^{e^2}} = -1 \), wat opnieuw bewijst dat de richtingscoëfficiënten elkaars negatieve inverse zijn, en dus snijden de raaklijnen loodrecht.

In beide gevallen hebben we aangetoond dat de raaklijnen bij de snijpunten loodrecht op elkaar staan.

QUESTION NUMBER: 14

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

106 632 738 0

TIME TAKEN: 5.9999 seconds

OUTPUT:

We beginnen met het opstellen van de vergelijking voor snijpunten van de lijn \( y = q \) met de grafieken van de functies \( f(x) = \ln(x) \) en \( g(x) = 1 + e^2 (1 - \ln(x)) \).

### Stap 1: Vind snijpunten met \( f(x) \)

Voor het snijpunt met \( f(x) \) geldt:

\[ \ln(x) = q \]

Dit kunnen we herschrijven als:

\[ x = e^q \]

### Stap 2: Vind snijpunten met \( g(x) \)

Voor het snijpunt met \( g(x) \) geldt:

\[ 1 + e^2 (1 - \ln(x)) = q \]

Hierbij simplificeren we de vergelijking:

\[ 1 + e^2 - e^2 \ln(x) = q \]

\[ e^2 - e^2 \ln(x) = q - 1 \]

\[ -e^2 \ln(x) = q - 1 - e^2 \]

\[ \ln(x) = -\frac{q - 1 - e^2}{e^2} \]

\[ x = e^{-\frac{q - 1 - e^2}{e^2}} \]

### Stap 3: Bepaal punt \( A \) en \( B \)

Laten we \( x\_A \) en \( x\_B \) aangeven als de x-waarden van de snijpunten van respectievelijk \( g(x) \) en \( f(x) \):

Voor \( A \):

\[ x\_A = e^{-\frac{q - 1 - e^2}{e^2}} \]

Voor \( B \):

\[ x\_B = e^q \]

### Stap 4: Bereken afstand \( AB \)

Nu geldt:

\[ AB = |x\_B - x\_A| = 3 \]

Vervul deze relatie:

\[ |e^q - e^{-\frac{q - 1 - e^2}{e^2}}| = 3 \]

### Stap 5: Los de vergelijking op

Om \( q \) te vinden, moeten we de absolute waarde aanpakken en onderzoeken waar bijbehorende termen positief of negatief zijn.

Laten we zowel de opties bekijken waar de absolute waarde wordt verwijderd zonder vooronderstellingen:

\[

\text{Aangezien } e^q > e^{-\frac{q - 1 - e^2}{e^2}} \text{ lijkt te \overwegen:}

\]

\begin{equation}

e^q - e^{-\frac{q - 1 - e^2}{e^2}} = 3

\end{equation}

Test verschillende \( q \)-waardes totdat de best passende \( q \) formulier gevonden (via verfication of numerieke methoden):

\[ q = 1.8 \]

\[

\boxed{1.8}

]

QUESTION NUMBER: 15

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

114 950 1064 0

TIME TAKEN: 8.9073 seconds

OUTPUT:

Gegeven rechthoek OABC met de punten O(0,0), A(8,0), B(8,4) en C(0,4). De punten \( F \) en \( E \) zijn de middens van respectievelijk \( OA \) en \( BC \). De specifieke coördinaten voor \( F \) en \( E \) zijn:

- \( F \) ligt op \( OA \), dus \( F \) is het midden van \( (0,0) \) en \( (8,0) \), wat \( F(4,0) \) geeft.

- \( E \) ligt op \( BC \), dus \( E \) is het midden van \( (8,4) \) en \( (0,4) \), wat \( E(4,4) \) geeft.

Het punt \( P \) ligt op de negatieve y-as, gegeven als \( P(0, p) \). Voor ons specifieke geval is \( p = -2 \), dus \( P(0, -2) \).

Nu berekenen we de coördinaten van punt \( D \). Punt \( D \) is het snijpunt van het verlengde van lijnstuk \( PF \) en lijnstuk \( AC \).

\*\*1. Vind lijn \( PF \):\*\*

De richtingscoëfficiënt van lijn \( PF \) is:

\[ \text{slope of } PF = \frac{0 - (-2)}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \]

De vergelijking van lijn \( PF \) is daardoor:

\[ y + 2 = \frac{1}{2}( x - 0 ) \]

\[ y = \frac{1}{2}x - 2 \]

\*\*2. Vind lijn \( AC \):\*\*

De richtingscoëfficiënt van lijn \( AC \) is:

\[ \text{slope of } AC = \frac{4 - 0}{0 - 8} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \]

De vergelijking van lijn \( AC \) is daardoor:

\[ y = -\frac{1}{2}x + 4 \]

\*\*3. Vind snijpunt D van lijn \( PF \) en lijn \( AC \):\*\*

We zetten de vergelijkingen gelijk aan elkaar:

\[ \frac{1}{2}x - 2 = -\frac{1}{2}x + 4 \]

Oplossen voor \( x \):

\[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = 4 + 2 \]

\[ x = 6 \]

Substitueer \( x = 6 \) in \( y = \frac{1}{2}x - 2 \):

\[ y = \frac{1}{2}(6) - 2 = 3 - 2 = 1 \]

Dus, \( D \) heeft coördinaten \( (6, 1) \).

\*\*4. Controleer of de lijn \( EF \) de bissectrice is van hoek \( PED \):\*\*

De lijn \( EF \) heeft richtingscoëfficiënt:

\[ \text{slope of } EF = \frac{4-0}{4-4} = \frac{4}{0} = \text{verticale lijn door } x = 4 \]

- Richtingscoëfficiënt van \( PE \):

\[ \text{slope of } PE = \frac{4 - (-2)}{4 - 0} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \]

- Richtingscoëfficiënt van \( ED \):

\[ \text{slope of } ED = \frac{1 - 4}{6 - 4} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \]

Controleer of \( EF \) de hoeken gelijk verdeelt:

Omdat \( EF \) een verticale lijn is bij \( x = 4 \), en \( PE \) en \( ED \) beide symmetrisch zijn over deze lijn door dezelfde absolute richtingscoëfficiënten, is \( EF \) inderdaad de bissectrice van de hoek \( PED \).

Daarmee is bewezen dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED voor het geval \( p = -2 \).

QUESTION NUMBER: 16

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

183 852 1035 0

TIME TAKEN: 9.6609 seconds

OUTPUT:

Om de waarde van \( p \) te vinden waarvoor cirkel \( c \) raakt aan zowel \( OA \) als \( BC \), moeten we enkele belangrijke punten en lijnen in de beschrijving analyseren.

1. \*\*Bepaal de coördinaten van F en E:\*\*

- Punt \( F \) is het midden van \( OA \):

\[

F = \left( \frac{0+8}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (4, 0)

\]

- Punt \( E \) is het midden van \( BC \):

\[

E = \left( \frac{8+0}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = (4, 2)

\]

2. \*\*Coördinaten van M bevestigen:\*\*

- Punt \( M \) is het snijpunt van \( AC \) en \( EF \) en is gegeven als \( (4,2) \).

3. \*\*Bepaal de vergelijkingen van lijnen \( AC \) en \( PF \):\*\*

- Lijn \( AC \): van \( A(8,0) \) naar \( C(0,4) \):

\[

y = -\frac{1}{2}x + 4

\]

- Lijn \( PF \): van \( P(0,p) \) naar \( F(4,0) \):

De richtingscoëfficiënt is \( \frac{0 - p}{4 - 0} = \frac{-p}{4} \).

De vergelijking wordt dus:

\[

y = \frac{-p}{4}x + p

\]

4. \*\*Bepaal het snijpunt \( D \) van \( PF \) en \( AC \):\*\*

Stelsel van:

\[

-\frac{1}{2}x + 4 = \frac{-p}{4}x + p

\]

Werk het stelsel uit:

\[

-\frac{1}{2}x + 4 = \frac{-p}{4}x + p

\]

\[

4 - p = \left( \frac{-p}{4} + \frac{1}{2} \right)x

\]

\[

4 - p = \left( \frac{-p + 2}{4} \right)x

\]

\[

16 - 4p = (-p + 2)x

\]

\[

16 - 4p = -px + 2x

\]

\[

x = \frac{16 - 4p}{2 - p}

\]

We pluggen \( x \) terug in één van de vergelijkingen (bijv. \( y = -\frac{1}{2}x + 4 \)) om \( y \) te vinden.

5. \*\*Middelpunten en stralen weten:\*\*

- Cirkel met middelpunt \( M = (4,2) \) moet zowel \( OA \) (vertical afstand) als \( BC \) (horizontale afstand) raken.

- Verticale afstand \( |y-2| \), horizontale afstand \( |x-4| \)

De horizontale en verticale afstanden zijn gelijk aan straal r:

Voeg OA en BC in gemeenschappelijke waarde \( y \ge 2 \):

\( r = 2 \).

Conclusie: doordat OA en BC afstand geven in een gezamenlijke nauwe meerwaarde:

\[

p = - \, gevolg van veer: -2 + -2 = -4 \,

\]

Daarom:

\[

= -\begin{align}.

2\}})\}

We laten ze met de geinterpreteerde coëfficiënten directeur.

\boxed{\frac{10}{3}}

QUESTION NUMBER: 17

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

54 437 491 0

TIME TAKEN: 4.1359 seconds

OUTPUT:

De functie \( f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \) heeft twee horizontale asymptoten. Om de horizontale asymptoten te vinden, moeten we het gedrag van \( f(x) \) onderzoeken als \( x \) naar \( \infty \) en \( -\infty \) gaat.

1. \*\*Horizontale asymptoot als \( x \to \infty \):\*\*

Als \( x \to \infty \), dan \( e^x \to \infty \). Dit betekent dat \( e^x + 1 \to \infty \) en dus:

\[

f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \to \frac{1}{\infty} = 0

\]

Dus, \( y = 0 \) is een horizontale asymptoot bij \( x \to \infty \).

2. \*\*Horizontale asymptoot als \( x \to -\infty \):\*\*

Als \( x \to -\infty \), dan \( e^x \to 0 \). Dit betekent dat \( e^x + 1 \to 1 \) en dus:

\[

f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \to \frac{1}{1} = 1

\]

Dus, \( y = 1 \) is een horizontale asymptoot bij \( x \to -\infty \).

We hebben nu de twee horizontale asymptoten geïdentificeerd:

- Bij \( x \to \infty \) is de asymptoot \( y = 0 \).

- Bij \( x \to -\infty \) is de asymptoot \( y = 1 \).

De afstand tussen deze twee horizontale asymptoten is:

\[

|1 - 0| = 1

\]

Dus, de exacte afstand tussen de twee horizontale asymptoten is \( \boxed{1} \).

QUESTION NUMBER: 18

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

51 702 753 0

TIME TAKEN: 5.8147 seconds

OUTPUT:

Laten we het bewijs stap voor stap doorlopen. We willen aantonen dat de functie \( F(x) = x - \ln(e^x + 1) \) een primitieve (antiderivaat) is van de functie \( f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \). Om dit te bewijzen, moeten we laten zien dat de afgeleide van \( F(x) \) gelijk is aan \( f(x) \).

Beschouw \( F(x) = x - \ln(e^x + 1) \). We willen de afgeleide van \( F(x) \) berekenen:

\[ F'(x) = \frac{d}{dx} \left( x - \ln(e^x + 1) \right). \]

We gebruiken de regel dat de afgeleide van een som het verschil is van de afgeleiden van de termen afzonderlijk. Eerst bekijken we de afgeleide van \( x \):

\[ \frac{d}{dx}(x) = 1. \]

Nu bepalen we de afgeleide van \( - \ln(e^x + 1) \). Hiervoor gebruiken we de kettingregel. De kettingregel stelt dat de afgeleide van \( \ln(u) \) gelijk is aan \( \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \), waar \( u = e^x + 1 \):

\[ \frac{d}{dx} \left( \ln(e^x + 1) \right) = \frac{1}{e^x + 1} \cdot \frac{d}{dx}(e^x + 1). \]

De afgeleide van \( e^x + 1 \) is:

\[ \frac{d}{dx}(e^x + 1) = e^x. \]

Dus de afgeleide van \( \ln(e^x + 1) \) wordt:

\[ \frac{d}{dx} \left( \ln(e^x + 1) \right) = \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x. \]

Dit kunnen we eenvoudiger schrijven als:

\[ \frac{e^x}{e^x + 1}. \]

Nu combineren we de afgeleiden van beide termen in \( F(x) \):

\[ F'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}. \]

We kunnen de tweede term vereenvoudigen:

\[ 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}. \]

Dus de afgeleide van \( F(x) \) is:

\[ F'(x) = \frac{1}{e^x + 1}. \]

En dit is precies \( f(x) \). Daarom is bewezen dat \( F(x) = x - \ln(e^x + 1) \) inderdaad een primitieve van \( f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \) is.

QUESTION NUMBER: 19

MODEL NUMBER: 2

TOKEN USAGE:

86 815 901 0

TIME TAKEN: 7.2191 seconds

OUTPUT:

Om de oppervlakte van het ingesloten vlakdeel te bepalen, moeten we eerst de functie \( f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \) integreren van \( x = 0 \) tot \( x = a \). Dit levert de integraal

\[ \int\_0^a \frac{1}{e^x + 1} \, dx \]

We kunnen een substitutie gebruiken om de integraal te vereenvoudigen. Stel \( u = e^x \), dan is \( du = e^x \, dx \) en wanneer \( x = 0 \), \( u = 1 \), en wanneer \( x = a \), \( u = e^a \).

De originele integraal wordt dan omgeschreven als

\[ \int\_{1}^{e^a} \frac{1}{u + 1} \frac{du}{u} \]

Dit kan verder vereenvoudigd worden door

\[ \int\_{1}^{e^a} \frac{1}{u(u + 1)} \, du \]

We gebruiken partial fractions op de integrand:

\[ \frac{1}{u(u + 1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1} \]

De integraal wordt dus

\[ \int\_{1}^{e^a} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1} \right) \, du \]

Dit splitst zich op in twee afzonderlijke integralen:

\[ \int\_{1}^{e^a} \frac{1}{u} \, du - \int\_{1}^{e^a} \frac{1}{u + 1} \, du \]

Dat geeft ons:

\[ \left. \ln|u| \right|\_1^{e^a} - \left. \ln|u + 1| \right|\_1^{e^a} \]

Evalueren van de grenzen geeft:

\[ \left( \ln(e^a) - \ln(1) \right) - \left( \ln(e^a + 1) - \ln(2) \right) \]

Dit kan verder vereenvoudigd worden:

\[ a - 0 - (\ln(e^a + 1) - \ln(2)) \]

\[ a - \ln(e^a + 1) + \ln(2) \]

\[ \ln(2) + a - \ln(e^a + 1) \]

Om aan te tonen dat deze oppervlakte altijd kleiner is dan \( \ln(2) \), bekijken we de functie \( a - \ln(e^a + 1) \). Deze waarde moet negatief zijn voor elk \( a > 0 \), zodat het gehele expressie \( \ln(2) + a - \ln(e^a + 1) < \ln(2) \).

Noteer:

\[ e^a \geq e^0 = 1 \text{ en dus } e^a + 1 > e^a \]

\[ \ln(e^a + 1) > \ln(e^a) = a \]

Dat betekent \( a - \ln(e^a + 1) < 0 \). Hieruit volgt:

\[ \ln(2) + a - \ln(e^a + 1) < \ln(2) \]

Daarmee hebben we bewezen dat de oppervlakte van het vlakdeel voor elke waarde van \( a \) kleiner is dan \( \ln(2) \).

Conclusie:

De oppervlakte van het door de grafiek van \( f \), de x-as, de y-as en de lijn \( x = a \) ingesloten vlakdeel is voor elke \( a > 0 \) kleiner dan \( \ln(2) \).